



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA  
MESTRADO ACADÊMICO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

JOÃO MARCELINO DE SOUSA FILHO

**CONTROLE PREDITIVO ROBUSTO BASEADO EM MODELO COMUTADO  
APLICADO A SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES EM MODO DE CONTROLE DE  
SINAL SATURADO: UMA ABORDAGEM *QUASI-MIN-MAX***

MOSSORÓ-RN

2025

JOÃO MARCELINO DE SOUSA FILHO

**CONTROLE PREDITIVO ROBUSTO BASEADO EM MODELO COMUTADO  
APLICADO A SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES EM MODO DE CONTROLE DE  
SINAL SATURADO: UMA ABORDAGEM *QUASI-MIN-MAX***

Dissertação apresentada ao Mestrado Acadêmico em Engenharia Elétrica do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Sistemas de Controle e Automação

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinícius Silvério Costa

MOSSORÓ-RN

2025

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

S725c Sousa Filho, João Marcelino de.  
Controle preditivo robusto baseado em modelo  
comutado aplicado a sistemas dinâmicos lineares em  
modo de controle de sinal saturado: uma abordagem  
quasi-min-max / João Marcelino de Sousa Filho. -  
2025.  
88 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinícius Silvério  
Costa .  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal  
Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em  
Engenharia Elétrica, 2025.

1. Controle preditivo baseado em modelo  
comutado. 2. Realimentação de saída comutada. 3.  
Anti-Windup comutado. 4. Matrizes co-primas  
comutadas. 5. Conversor boost CTE. I. , Prof.  
Dr. Marcus Vinícius Silvério Costa, orient. II.  
Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade  
com AACR2 e os dados fornecidos pelo) autor(a).  
Biblioteca Campus Mossoró / Setor de Informação e Referência  
Bibliotecária: Keina Cristina Santos Sousa e Silva  
CRB: 15/120

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

JOÃO MARCELINO DE SOUSA FILHO

**CONTROLE PREDITIVO ROBUSTO BASEADO EM MODELO COMUTADO  
APLICADO A SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES EM MODO DE CONTROLE DE  
SINAL SATURADO: UMA ABORDAGEM *QUASI-MIN-MAX***

Dissertação apresentada ao Mestrado Acadêmico em Engenharia Elétrica do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Sistemas de Controle e Automação

Defendida em: 28/01/2025

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Marcus Vinícius Silvério Costa (Orientador)  
Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA)

---

Prof. Dr. Victor de Paula Brandão Aguiar  
Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA)

---

Prof. Dr. Elenilson de Vargas Fortes  
Instituto Federal de Goiás (IFG)

---

Prof. Dr. Fabricio Gonzalez Nogueira  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

*Dedico este trabalho à minha família, por sempre me apoiar nos meus estudos e incentivar a minha jornada acadêmica.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por guiar os meus passos, me permitindo concluir essa etapa com determinação e discernimento.

Agradeço a minha mãe, Rosa Maria, por sempre estar ao meu lado nos momentos mais adversos, me motivar a continuar estudando e não desistir dos meus sonhos.

Agradeço ao meu irmão, Francisco Rafael e a minha irmã, Maria Rayane, por fazerem parte do meu cotidiano com companheirismo e amizade.

Agradeço ao orientador Prof. Dr. Marcus Vinícius Silvério Costa por todos os ensinamentos, suporte, dedicação e paciência em me nortear durante a pesquisa.

Agradeço ao Prof. Dr. Elenilson de Vargas Fortes por sua valiosa contribuição à minha formação como pesquisador, por meio de todo o conhecimento compartilhado.

Agradeço ao Me. Francisco Luís de Carvalho Costa por todo o suporte e disponibilidade em esclarecer minhas dúvidas e me acompanhar durante o desenvolvimento da pesquisa.

Agradeço à banca examinadora pela presença e dedicação na avaliação deste trabalho, contribuindo para o seu aprimoramento.

Agradeço aos meus amigos, Gabriel Luíz e Vanessa Gabriela, por todo o apoio, diálogo cotidiano e palavras de incentivo para seguir avançando em direção aos meus objetivos.

Agradeço ao Grupo de Estudo de Automação e Controle (GEAC) da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA), por ter me proporcionado um amplo conhecimento e por ter contribuído para o meu desenvolvimento acadêmico, assim como à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro e institucional que possibilitaram a realização dessa pesquisa.

## RESUMO

Este trabalho propõe um controlador preditivo robusto baseado em modelo comutado via realimentação de saída para sistemas lineares sujeitos à comutação. A abordagem proposta possibilita a utilização do procedimento de otimização *offline* ou *online*. O teorema proposto para obter os ganhos de realimentação de saída é modelado utilizando desigualdades matriciais lineares para resolver o problema de otimização *quasi-min-max* combinado com o observador de estado e a desigualdade de Lyapunov-Metzler. Ademais, considera-se uma lei de comutação para garantir a estabilidade robusta do sistema em malha fechada via da realimentação da saída. Para evitar a saturação do sinal de controle, define-se matrizes co-primas comutadas e aplica-se a síntese *Anti-Windup* comutada via LMIs. Então, comparam-se os resultados das simulações do método proposto com um esquema RMPC *quasi-min-max* usando um exemplo numérico LPV (do inglês, *Linear Parameter-Varying*). Em seguida, a metodologia é aplicada ao controle da tensão de saída do conversor *boost* com célula de comutação de três estados. Em ambos os casos, a metodologia foi capaz de estabilizar os sistemas em malha fechada e fornecer melhores resultados ao serem comparados com o *benchmark*, em termos de análises gráficas e métricas adotadas. Portanto, é possível afirmar que a metodologia proposta é eficaz para a estabilização do exemplo numérico LPV e do conversor *boost*. Para trabalhos futuros, sugere-se a aplicação dessa abordagem para o controle de sistemas elétricos de potência.

**Palavras-chave:** Controle preditivo baseado em modelo comutado. Realimentação de saída comutada. *Anti-Windup* comutado. Matrizes co-primas comutadas. Conversor *boost* CCTE

## ABSTRACT

This work proposes a robust predictive controller for switched models via output feedback for linear systems subject to switching. The proposed approach makes it possible to use the offline or online optimization procedures. The theorem proposed to obtain the output feedback gains is modeled using linear matrix inequalities to solve the *quasi-min-max* optimization problem combined with the state observer and the Lyapunov-Metzler inequality. In addition, a switching law is considered to guarantee the robust stability of the closed-loop system via output feedback. To avoid saturation of the control signal, switched co-prime matrices are defined and switched Anti-Windup synthesis via LMIs is applied. Simulation results of the proposed method are then compared with a *quasi-min-max* RMPC scheme using an LPV (Linear Parameter-Varying) numerical example. Next, the methodology is applied to controlling the output voltage of the *boost* converter with a three-state switching cell. For both cases, the methodology was able to stabilize the closed-loop systems and provide better results when compared to the benchmark, in terms of the graphical analyses and metrics adopted. It is therefore possible to state that the proposed methodology is effective for stabilizing the LPV numerical example and the *boost* converter. For future work, it is suggested that this approach be applied to the control of electrical power systems.

**Keywords:** Predictive control based on switched model. Switched output feedback. Switched *Anti-Windup*. Switched co-prime matrices. *boost* 3SSC converter.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Factibilidade de uma região convexa. . . . .	19
Figura 2 – Factibilidade de um conjunto solução relaxado. . . . .	23
Figura 3 – Polítopo com cinco vértices. . . . .	25
Figura 4 – Sinal chaveado. . . . .	31
Figura 5 – Diagrama de controle para o SOF-RMPC-LPV. . . . .	48
Figura 6 – Diagrama de controle para o SW-AW com lei de comutação. . . . .	52
Figura 7 – Diagrama de controle para o SOF-RMPC-LPV com SW-AW. . . . .	56
Figura 8 – Trajetórias dos parâmetros $\alpha(k)$ e $\beta(k)$ para o caso <i>offline</i> . . . . .	59
Figura 7 – Elipsóides de estabilidade. . . . .	61
Figura 8 – Trajetórias dos estados do sistema e estados estimados ( <i>offline</i> ). . . . .	62
Figura 9 – Sequência de chaveamento para diferentes intervalos de $\alpha(k)$ e $\beta(k)$ . . . . .	63
Figura 10 – Sinais de controle limitados por saturação para o procedimento <i>offline</i> . . . . .	64
Figura 11 – Função objetivo para o caso <i>offline</i> . . . . .	64
Figura 12 – Localização dos polos para diferentes intervalos de $\alpha(k)$ e $\beta(k)$ ( <i>offline</i> ). . . . .	66
Figura 13 – Trajetórias dos parâmetros $\alpha(k)$ e $\beta(k)$ no procedimento <i>online</i> . . . . .	67
Figura 14 – Sequência de chaveamento para diferentes intervalos de $\alpha(k)$ e $\beta(k)$ . . . . .	68
Figura 15 – Trajetórias dos estados do sistema e estados estimados ( <i>online</i> ). . . . .	69
Figura 16 – Sinais de controle limitados por saturação para o procedimento <i>online</i> . . . . .	70
Figura 17 – Funções objetivo para procedimento <i>online</i> . . . . .	70
Figura 18 – Localização dos polos para $\alpha(k)$ e $\beta(k)$ ampliados ( <i>online</i> ). . . . .	71
Figura 19 – Conversor <i>boost</i> com célula de comutação três estados. . . . .	72
Figura 20 – Tensão de entrada e potência de saída. . . . .	76
Figura 21 – Diagrama de controle para o <i>boost</i> CCTE. . . . .	77
Figura 22 – Sequência de chaveamento. . . . .	80
Figura 23 – Tensão de saída $V_o(t)$ . . . . .	80
Figura 24 – Corrente no indutor e tensão no capacitor. . . . .	81
Figura 25 – Sinal de controle ( <i>Duty Cycle</i> ). . . . .	81
Figura 26 – Tensão de saída e tensão de saída estimada. . . . .	82
Figura 27 – Corrente no indutor e tensão no capacitor e resultado estimado. . . . .	83
Figura 28 – Elipsóides de estabilidade para os subsistemas 1 e 2. . . . .	83

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– <i>Look-Up table</i> para o subsistema 1. . . . .	60
Tabela 2	– <i>Look-Up table</i> para o subsistema 2. . . . .	61
Tabela 3	– Índices não-intrusivos para $x(k)$ e $\hat{x}(k)$ ( <i>offline</i> ). . . . .	65
Tabela 4	– Índices não intrusivos para $x(k)$ e $\hat{x}(k)$ ( <i>online</i> ). . . . .	71
Tabela 5	– Parâmetros do conversor <i>boost</i> . . . . .	72

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b>	<b>15</b>
1.1.1	Objetivo geral	15
1.1.2	Objetivos específicos	15
<b>1.2</b>	<b>Estrutura da dissertação</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES</b>	<b>18</b>
<b>2.1</b>	<b>Definição Matemática</b>	<b>18</b>
<b>2.2</b>	<i>Solvers</i> de LMIs	19
<b>2.3</b>	Estabilidade de Lyapunov	20
<b>2.4</b>	Complemento de Schur	21
<b>2.5</b>	Relaxação de LMIs	22
<b>3</b>	<b>CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO</b>	<b>25</b>
<b>3.1</b>	<b>Modelo de incertezas politópicas</b>	<b>25</b>
<b>3.2</b>	<b>O algoritmo <i>Quasi-Min-Max</i></b>	<b>26</b>
3.2.1	Realimentação de estados com procedimento de resolução <i>online</i>	27
3.2.2	Realimentação de saída com procedimento de resolução <i>online</i>	28
3.2.3	Realimentação de saída com procedimento de resolução <i>offline</i> relaxado	30
<b>4</b>	<b>CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO COMUTADO</b>	<b>31</b>
<b>4.1</b>	<b>Introdução aos sistemas comutados</b>	<b>31</b>
<b>4.2</b>	<b>Desigualdade de Lyapunov-Metzler</b>	<b>32</b>
<b>4.3</b>	<b><i>Quasi-Min-Max</i> RMPC via Realimentação de saída comutada</b>	<b>33</b>
4.3.1	Projeto de observador de estados comutado com matriz de ponderação	45
4.3.2	Critério de estabilidade robusta para sistemas comutados	46
<b>4.4</b>	<b>Diagrama de controle para o SOF-RMPC-LPV</b>	<b>48</b>
<b>5</b>	<b>COMPENSADOR <i>ANTI-WINDUP</i> COMUTADO</b>	<b>49</b>
<b>5.1</b>	<b>Síntese de compensador <i>Anti-Windup</i> comutado via LMIs</b>	<b>49</b>
<b>5.2</b>	<b>Diagrama de controle para o SW-AW via realimentação de estados</b>	<b>52</b>
<b>6</b>	<b>PROJETO DE SOF-RMPC-LPV COM SW-AW</b>	<b>54</b>
<b>6.1</b>	<b>Algoritmo <i>offline</i> para o SOF-RMPC-LPV com SW-AW</b>	<b>54</b>
<b>6.2</b>	<b>Diagrama de Controle para o SOF-RMPC-LPV com SW-AW</b>	<b>55</b>

<b>7</b>	<b>EXEMPLO NUMÉRICO</b> . . . . .	<b>57</b>
<b>7.1</b>	<b>Descrição do modelo</b> . . . . .	<b>57</b>
7.1.1	Estratégia de controle para o exemplo numérico . . . . .	58
7.1.2	Simulações do exemplo numérico . . . . .	59
7.1.2.1	Simulação I - Procedimento de resolução <i>offline</i> . . . . .	59
7.1.2.2	Simulação II - Procedimento de resolução <i>online</i> . . . . .	67
<b>8</b>	<b>CONVERSOR <i>BOOST</i> CCTE</b> . . . . .	<b>72</b>
<b>8.1</b>	<b>Modelagem do conversor <i>boost</i> CCTE</b> . . . . .	<b>72</b>
8.1.1	Modelo no espaço de estados médio para o conversor <i>boost</i> CCTE . . . . .	73
8.1.2	Modelo politópico comutado para o conversor <i>boost</i> CCTE . . . . .	75
<b>8.2</b>	<b>Estratégia de controle para o conversor <i>boost</i> CCTE</b> . . . . .	<b>77</b>
<b>8.3</b>	<b>Resultados das simulações do conversor <i>boost</i> CCTE</b> . . . . .	<b>79</b>
8.3.1	Análise comparativa SOF-RMPC <i>vs</i> RMPC . . . . .	79
8.3.2	Análise comparativa do resultado estimado . . . . .	82
<b>9</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS</b> . . . . .	<b>84</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>85</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O controle preditivo robusto baseado em modelo (em inglês, *Robust Model Predictive Control* - RMPC) via desigualdades matriciais lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMIs) foi formulado por Kothare *et al.* (1996) utilizando algoritmo *min-max* e procedimento de resolução *online*. Posteriormente, Wan e Kothare (2003) formularam um procedimento de resolução *offline*, o que reduziu o esforço computacional do procedimento de otimização.

Dentre as melhorias desenvolvidas nessa metodologia de controle, é válido citar as contribuições de Camacho *et al.* (2007), como a garantia de um desempenho de estabilidade robusto associado ao comportamento assintótico estabelecido pelas funções de Lyapunov e a capacidade de incluir restrições de entrada-saída na estrutura de controle.

Em Lu e Arkun (2000) foi proposto um esquema MPC de realimentação de estados via algoritmo *quasi-min-max* aplicado a sistemas lineares com variação de parâmetros (LPV). Posteriormente, Park *et al.* (2011), baseado em Lu e Arkun (2000), propuseram um método MPC *quasi-min-max* para sistemas LPV via realimentação de saída.

Visando aperfeiçoar o controle proposto, o artigo de Kim e Lee (2017) propõe uma versão modificada do esquema proposto em Park *et al.* (2011) baseado em Su e Tan (2012). Recentemente, Rego e Costa (2023) aperfeiçoaram a região de factibilidade dos trabalhos de Park *et al.* (2011) e Kim e Lee (2017) por meio de procedimentos de relaxação e adicionaram um compensador Anti-Windup para contrornar a saturação não prevista do controlador.

No que se refere ao MPC-LMI, segundo Rego e Costa (2023), uma limitação característica das estratégias desse tipo de controle é a incapacidade de aplicação em algumas plantas devido ao alto custo computacional dos procedimentos recursivos por otimização *online*. Por outro lado, Rego e Costa (2023) enfatizam que ao aplicar um modelo de resolução *offline*, existe o risco de saturação não esperada do sinal de controle, que recebe o nome de *windup*.

Para contornar essa situação, é aplicado um compensador *Anti-Windup*. Exemplos de trabalhos nessa temática são os de Wada e Saeki (2016), que aborda uma compensação *Anti-Windup* com RMPC e restrições de entrada e o de Li *et al.* (2013), onde é apresentado a síntese de realimentação de saída dinâmica RMPC com entradas saturadas.

Todavia, é válido mencionar que a metodologia de controle dos trabalhos de Park *et al.* (2011), Kim e Lee (2017) e Rego e Costa (2023) possuem a característica de que a ação de controle é capaz de lidar com um único sistema de cada vez. Nesse sentido, o RMPC comutado surge como uma solução para essa problemática.

No caso, um sistema chaveado pode ser definido como um conjunto de subsistemas no domínio do tempo, seja contínuo ou discreto, nos quais uma lei de controle comanda o chaveamento entre esses subsistemas (SUN; GE, 2005). Nesta área de pesquisa, os artigos de Liberzon e Morse (1999) e Geromel e Colaneri (2006) apresentam conceitos fundamentais sobre o controle de subsistemas sujeitos a comutação.

Logo, essa metodologia se destaca pela possibilidade de aplicação em plantas com vários pontos de operação, como pode ser verificado nos estudos de Esfahani e Pieper (2019) e Carvalho *et al.* (2023). No trabalho de Esfahani e Pieper (2019) é elaborado um controlador preditivo robusto destinado a sistemas lineares sujeitos a comutação em face distúrbios limitados em norma. Adicionalmente, Carvalho *et al.* (2023) apresentam uma abordagem para o controle de Subsistemas LTV comutados por meio da aplicação da regra de comutação, utilizando configurações *online* e *offline*.

Ademais, o RMPC comutado possibilita o controle de diversos tipos de plantas. Em Zheng *et al.* (2022) é proposta uma metodologia de controle com lógica de comutação para rastrear a trajetória lateral de um veículo autônomo. No trabalho de Bakeer *et al.* (2022), por sua vez, foi desenvolvida uma estratégia de controle baseada em redes neurais artificiais para mitigar os efeitos da incompatibilidade de parâmetros em um inversor trifásico.

Nessa área de pesquisa, é válido mencionar a pesquisa conduzida por Sleiman *et al.* (2021), na qual foi desenvolvida uma metodologia de RMPC comutado com procedimento de resolução *online* para regular a velocidade e posição de robôs. De fato, o controle comutado é frequentemente aplicado a diversos tipos de sistemas LTI, como pode ser verificado em Hall e Bridgeman (2021), Liu *et al.* (2020) e Kiani *et al.* (2020).

Além disso, é relevante destacar as contribuições relacionadas ao MPC aplicadas ao controle de conversores do tipo *boost*. Em Costa *et al.* (2017) é proposto um MPC com relaxação aplicado ao conversor *boost* com modelagem LTV. No trabalho de Moreira *et al.* (2021), foi apresentado um controlador que utiliza o Controle Preditivo por Modelo Fuzzy (FMPC) em conjunto com um observador de estado fuzzy, aplicados a um conversor *boost*.

Nessa linha de pesquisa relacionada a aplicação do MPC em conjunto com a lógica fuzzy, é interessante citar o artigo de Yang *et al.* (2014), que propõe o FMPC *quasi-min-max* aplicado ao controle de células a combustível de metanol direto. Ademais, Babayomi *et al.* (2021) propuseram um controlador preditivo por modelo recursivo adaptativo, fazendo uso de uma série de filtros baseados em lógica fuzzy.

Na literatura, observa-se a existência de uma área ainda pouco explorada relacionada a pesquisas que aplicam o algoritmo *quasi-min-max* a sistemas sujeitos à comutação. Nesse contexto, o foco desta dissertação é desenvolver um controlador preditivo robusto baseado em modelo comutado, utilizando LMIs e o algoritmo *quasi-min-max*.

Neste contexto, este trabalho propõe uma síntese de um controlador preditivo robusto baseado em modelo comutado, que pode ser aplicada tanto para sistemas LPV como LTV via realimentação de saída. Na literatura, há artigos que abordam o LPV comutado, porém, o estudo desses trabalhos é conduzido em tempo contínuo, ver por exemplo, Lu e Wu (2004), Xie *et al.* (2019), Postma e Nagamune (2012) e Lescher *et al.* (2006). Por outro lado, o estudo apresentado neste artigo é um RMPC e portanto, conduzido em tempo discreto.

A metodologia proposta é uma extensão das metodologias de controle de Rego e Costa (2023) e da aplicação da desigualdade de Lyapunov-Metzler com a regra de comutação definida por Geromel e Colaneri (2006). Ademais, a metodologia de relaxação desenvolvida por Cuzzola *et al.* (2002) é aplicada para obter condições mais conservadoras em termos de LMIs.

Nessa abordagem, assim como em Rego e Costa (2023) e Park *et al.* (2011), o algoritmo *quasi-min-max* é empregado, no qual a ação de controle ótima é calculada para minimizar o limite superior do valor quase pior de uma função objetivo quadrática de horizonte infinito. A partir dessa abordagem, são propostas configurações *offline* e *online* por realimentação de saída para sistemas lineares com parâmetros variantes sujeitos à comutação.

A metodologia proposta se revela uma abordagem promissora ao analisar os gráficos, bem como índices de performance não intrusivos, ao ser comparada com o *benchmark* utilizando os mesmos parâmetros de projeto e atribuindo o mesmo range de variação LPV para verificar a eficácia da metodologia proposta.

Ademais, este trabalho aplica a metodologia proposta para controlar a tensão de saída do conversor *boost* com célula de comutação em três estados. Nesse caso, adota-se uma abordagem politópica comutada modelada a partir da variação da tensão de entrada e da potência de saída do conversor (ALVES, 2023). Nesse sentido, é desenvolvido um diagrama de controle capaz de controlar o conversor utilizando realimentação de saída comutada.

Portanto, esta dissertação demonstra que o controle desenvolvido é aplicável tanto a sistemas lineares com parâmetros variantes (LPV), quanto a sistemas lineares que variam ao longo do tempo (LTV). Isso é possível porque um sistema LPV pode ser modelado como um sistema politópico LTV (REGO, 2019).

## 1.1 Objetivos

Esta dissertação propõe uma abordagem via LMIs para estabilizar sistemas lineares em tempo discreto sujeitos à comutação.

### 1.1.1 Objetivo geral

A partir dos trabalhos de Kothare *et al.* (1996), Cuzzola *et al.* (2002), Park *et al.* (2011), Rego e Costa (2023), Geromel e Colaneri (2006) e Turner *et al.* (2003), esta dissertação tem como objetivo geral a síntese de controladores via LMIs para estabilizar sistemas lineares sujeitos a comutação por realimentação de saída de forma *online* e *offline* por meio do algoritmo *quasi-min-max*.

### 1.1.2 Objetivos específicos

- Desenvolver uma estratégia de controle preditivo baseado em modelo para sistemas LPV comutados representados no espaço de estados, otimizada usando LMIs, em que os ganhos comutados são implementados *offline* através de uma *Look-up table*. Este método é baseado no algoritmo *quasi-min-max* com realimentação de saída *offline* apresentado em Rego e Costa (2023) e na desigualdade de Lyapunov-Metzler modificada de Geromel e Colaneri (2006).
- Aplicar a desigualdade modificada de Lyapunov-Metzler e a lei de comutação baseada em estados estimados para sistemas LPV de tempo discreto, com base nos trabalhos de Geromel e Colaneri (2006) e Park *et al.* (2011). Esta abordagem permite a comutação mesmo quando os estados não estão disponíveis para medição, uma vez que a lei de comutação definida neste trabalho emprega uma função de Lyapunov que utiliza estados estimados definida por Park *et al.* (2011);
- Realizar a síntese robusta de AW para modelos LPV considerando a modelagem comutada como uma implementação às técnicas de Turner *et al.* (2003) e Rego e Costa (2023). Em as ambas as técnicas citadas, a metodologia é modelada para sistemas sem considerar a comutação de sistemas. Em contraste, a metodologia apresentada nesta dissertação considera a ação de chaveamento para múltiplos subsistemas LPV;

- Projetar um observador de estados com um critério de estabilidade robusto via realimentação de saída para sistemas LPV comutados no espaço de estados. Essa formulação é capaz de garantir a factibilidade do algoritmo *offline* via realimentação de saída, que considera a estrutura matricial aumentada baseada na condição de factibilidade de Wan e Kothare (2002);
- Formular uma restrição baseada em Park *et al.* (2011) e Rego e Costa (2023) para garantir a robustez do sistema mesmo com a ação de chaveamento. Nesse caso, as restrições adotadas por Park *et al.* (2011) e Rego e Costa (2023) não consideram a ação de comutação. Por outro lado, o método proposto modela a restrição de robustez considerando a ação de comutação para garantir a robustez para sistemas LPV comutados;
- Aplicar a metodologia de controle proposta para controlar a tensão de saída do conversor *boost* CCTE com base na variação da tensão de entrada e da potência de saída do conversor. Para isso, utiliza-se uma modelagem politópica comutada, analogamente ao que foi realizado por Alves (2023).

## 1.2 Estrutura da dissertação

- **Capítulo 2:** Aborda conceitos relacionados às LMIs e ferramentas computacionais para resolver problemas de otimização, aborda a condição de estabilidade de Lyapunov via LMI, apresenta o complemento de Schur e a técnica de relaxação de LMIs utilizada para auxiliar nas formulações dos teoremas propostos.
- **Capítulo 3:** Define um modelo de incertezas politópicas, fundamenta sobre o algoritmo *quasi-min-max* e discute sobre os diversos tipos de otimização que utilizaram o algoritmo *quasi-min-max* por realimentação de estados e por realimentação de saída.
- **Capítulo 4:** Apresenta o conceito de um sistema chaveado, aborda sobre a desigualdade de Lyapunov-Metzler no tempo discreto, formula o controle proposto com realimentação de saída utilizando o algoritmo *quasi-min-max*, formula o observador de estados comutado com matriz de ponderação e o critério de estabilidade robusta do conjunto controlador-observador para o caso proposto.
- **Capítulo 5:** Formula o teorema proposto para o compensador *Anti-WindUp* comutado e apresenta os algoritmos de otimização para o procedimento *offline*, destacando as particularidades desse procedimento. Além disso, recapitula os teoremas da metodologia de controle proposta nesta dissertação.

- **Capítulo 6:** Apresenta, inicialmente, o circuito do conversor *boost* CCTE e os parâmetros utilizados. Em seguida, modela o conversor *boost* no espaço de estados médio e conceitua o modelo politópico comutado que será utilizado para aplicar a metodologia de controle proposta.
- **Capítulo 7:** Utiliza *benchmarks* para comparar os resultados das simulações referentes à aplicação da metodologia proposta em um exemplo numérico LPV no espaço de estados e ao conversor *boost* CCTE. Ademais, também são discutidas as estratégias propostas para efetuar o controle desses sistemas mencionados.
- **Capítulo 8:** Apresenta as conclusões fundamentadas nos resultados para o exemplo numérico e para o conversor *boost* mencionados no capítulo anterior, reunindo os principais pontos da pesquisa. Por fim, são sugeridos trabalhos para pesquisas futuras.

## 2 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

Neste capítulo, são discutidos os conceitos relacionados à definição de LMI (seção 2.1), bem como as ferramentas para resolver problemas de otimização. Além disso, serão abordados o critério de estabilidade de Lyapunov (seção 2.3) e a condição de estabilidade de Lyapunov via LMI (subseção 2.3). Por fim, nas seções 2.4 e 2.5, serão apresentados, respectivamente, o complemento de Schur e o conceito de relaxação de LMIs, os quais auxiliarão nas deduções ao longo da dissertação.

### 2.1 Definição Matemática

Segundo Costa (2012), um dos motivos pelos quais as Desigualdades Matriciais Lineares (Linear Matrix Inequalities - LMIs) são notáveis é a capacidade de expressar diversas restrições e especificações. A definição matemática de uma LMI, conforme apresentada por Gahinet *et al.* (1994), é detalhada na **Definição 1**.

**Definição 1.** *Desigualdades Matriciais Lineares são combinações lineares de matrizes, simétricas com autovalores não negativos, cujas soluções numéricas podem ser obtidas pela minimização de uma dada função objetivo.*

Uma LMI pode ser representada por

$$F(x) = x_1F_1 + x_2F_2 + x_3F_3 + \dots + x_mF_m \geq -F_0 \quad (2.1)$$

Ou ainda:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_iF_i \geq 0 \quad (2.2)$$

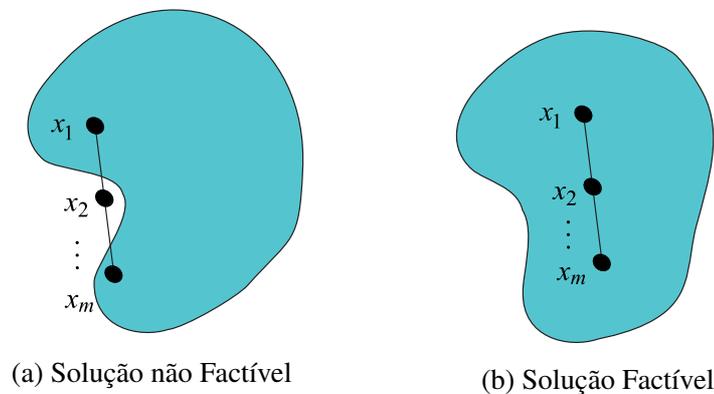
Em (2.2),  $x_i \in \mathbb{R}^m$  e  $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são simétricos semi-definidos positivo para  $i = 0, 1, \dots, m$ . Quando a desigualdade (2.2) apresenta solução factível contida em um conjunto solução convexo  $\{x \in \mathbb{R}^m | F(x) \geq 0\}$ , diz-se que a restrição é convexa.

A notação  $\geq$  é utilizada para denotar uma matriz semi-definida positiva, na qual os autovalores de  $F_i(x) \geq 0$  são positivos. Além dessa notação, as inequações (2.1) e (2.2) podem ser classificadas como semi-definida negativa ( $F_i(x) \leq 0$ ), onde os autovalores de  $F_i(x)$  são negativos; matriz definida positiva ( $F_i(x) > 0$ ), com todos os autovalores positivos; e matriz definida negativa ( $F_i(x) < 0$ ), que possui todos os autovalores negativos, como discutido por Aguirre (2007).

Com relação ao conceito de factibilidade mencionado na **Definição 1**, segundo Boyd *et al.* (1994), Costa (2012) e Carvalho (2021), um conjunto solução é factível se, e somente se, todas as restrições impostas ao modelo são satisfeitas, ou seja, se todas as soluções estão contidas em uma região delimitada, caso contrário, a solução é não-factível.

A Figura 1 ilustra quando uma solução é factível ou não. No caso da Figura 1 (a), é apresentado um conjunto de soluções fora da área de restrição, o que o torna infactível. Enquanto na Figura 1 (b), todos os elementos estão contidos no conjunto delimitado pela restrição, logo, são factíveis (COSTA, 2012; CARVALHO, 2021).

Figura 1 – Factibilidade de uma região convexa.



Fonte: adaptado de Costa *et al.* (2017) e Carvalho (2021).

## 2.2 Solvers de LMIs

Em problemas de controle, a solução de LMIs é determinada a partir de um problema de otimização convexa, como descrito por (2.3).

$$\begin{cases} \min_x c^T x \\ \text{sujeito a: } F(x) \geq 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Em (2.3),  $c^T x$  é o objetivo linear e  $F(x) \geq 0$  é a restrição. Para resolver o problema descrito em (2.3), podem ser utilizados *solvers* desenvolvidos para resolver problemas de programação semidefinida e otimização convexa. *Solvers* como o LMILAB, LMITOOL, SeDuMi, LMISol e SDPT3 são códigos abertos e disponibilizados de forma gratuita. Além disso, essas ferramentas são compatíveis com os softwares MATLAB e GNU/OCTAVE (AGUIRRE, 2007).

O LMILAB é um conjunto de ferramentas integrado ao MATLAB projetado para resolver LMIs, com um método numérico inicialmente proposto por Packard e Doyle em 1993. Além disso, o LMILAB inclui um manual abrangente sobre como resolver LMIs, desenvolvido

por Gahinet e colaboradores em 1995, e é amplamente referenciado em trabalhos que envolvem o uso de LMIs, como apontado por Costa (2012).

Conforme Aguirre (2007) e Carvalho (2021), o LMITOOL está disponível de forma gratuita no Scilab, uma plataforma de código aberto para programação. Este conjunto de ferramentas é fundamentado no método de resolução por programação semidefinida, cujo desenvolvimento foi conduzido por Vandenberghe e Boyd em 1996 .

O SeDuMI, criado por Sturm em 1999, foi projetado para aprimorar a otimização em espaços cônicos simétricos. Este *software* é compatível com diversas interfaces, como o SeDumi Interface, YALMIP, LMI-Lab Translator e tklimitool, como mencionado por Aguirre (2007) e Costa (2012).

O LMISol é um pacote gratuito criado em 1997 pelos brasileiros Oliveira, Farias e Geronmel. Essa ferramenta computacional é destinada para a resolução de LMIs, como mencionado nos trabalhos de Aguirre (2007) e (CARVALHO, 2021).

### 2.3 Estabilidade de Lyapunov

Considere um sistema linear autônomo definido por (2.4).

$$x(k+1) = Ax(k) \quad (2.4)$$

No sistema (2.4),  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  e  $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ . O sistema (2.4) é dito em equilíbrio quando  $\dot{x} \equiv 0$ , isto é, quando não há variação nos estados do sistema (GAHINET *et al.*, 1994; REGO, 2019). Conforme Rego (2019), o critério de estabilidade de Lyapunov pode ser definido por meio de uma função quadrática utilizando diversas abordagens matemáticas. Nesse projeto de qualificação, será adotada a função quadrática escalar positiva da **Definição 2** .

**Definição 2.** *Critério de estabilidade de Lyapunov para sistemas discretos:*

$$V(x(k)) = x(k)^T Px(k) > 0 \quad (2.5)$$

Na equação (2.5),  $P = P^T$ , com  $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  e o equilíbrio é alcançado se  $\Delta V(x(k)) < 0$ .

Com o objetivo de modelar a condição de estabilidade utilizando LMI para o sistema apresentado em (2.4), levando em consideração o critério de Lyapunov conforme a **Definição 2**, como discutido por Aguirre (2007) e Costa (2017), examina-se a variação das trajetórias ao longo do vetor de estado  $x(k)$ , como descrito em (2.6).

$$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0 \quad (2.6)$$

Ao aplicar o critério de Lyapunov da **Definição 2** em (2.6) é obtido (2.7).

$$x(k+1)^T P x(k+1) - x(k)^T P x(k) < 0 \quad (2.7)$$

Substituindo  $x(k+1) = Ax(k)$  em (2.7) a inequação (2.8) é formulada.

$$[Ax(k)]^T P [Ax(k)] - x(k)^T P x(k) < 0 \quad (2.8)$$

A inequação (2.8) pode ser reescrita como (2.9)

$$x(k)^T (A^T P A - P) x(k) < 0 \quad (2.9)$$

A partir de (2.9), é verificado que para garantir o ponto de equilíbrio, é necessário que a LMI (2.10) seja factível.

$$A^T P A - P < 0 \quad (2.10)$$

Logo, a estabilidade de Lyapunov é alcançada quando existe uma matriz de estabilidade  $P = P^T$ , tal que  $A^T P A - P < 0$  seja factível  $\forall x \neq 0$  e  $\forall k \geq 0$ .

Segundo Aguirre (2007), uma abordagem por otimização convexa é utilizada para determinar a matriz de estabilidade  $P$ , que atende ao critério de Lyapunov da **Definição 2** como em (2.11).

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{P=P^T} \text{tr}\{P\} \\ \text{sujeito a : } P > 0 \\ A^T P A - P < 0 \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Portanto, o problema de otimização (2.11) calcula a matriz  $P = P^T$  de mínimo traço sujeito a  $P > 0$  e  $A^T P A - P < 0$ .

## 2.4 Complemento de Schur

O complemento de Schur é uma técnica usada para transformar desigualdades não lineares em desigualdades lineares, o que é particularmente útil em problemas de otimização e controle. Essa abordagem é aplicável tanto em sistemas no tempo contínuo quanto em sistemas no tempo discreto (REGO, 2019; COSTA, 2017).

Nesse sentido, considere a matriz quadrada simétrica  $M$  formada por quatro submatrizes como em (2.12).

$$M = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Em (2.12), se  $J_1, J_2, J_3$  e  $J_4$  são quadradas e não singulares, isto é,  $J_1^{-1} \neq 0, J_2^{-1} \neq 0, J_3^{-1} \neq 0$  e  $J_4^{-1} \neq 0$ , é possível aplicar o complemento de Schur de  $M$  em relação a  $J_1, J_2, J_3$  e  $J_4$ , como em (2.13)-(2.16), respectivamente.

$$(M/J_1) = J_4 - J_3 J_1^{-1} J_2 \quad (2.13)$$

$$(M/J_2) = J_3 - J_4 J_2^{-1} J_1 \quad (2.14)$$

$$(M/J_3) = J_2 - J_1 J_3^{-1} J_4 \quad (2.15)$$

$$(M/J_4) = J_1 - J_2 J_4^{-1} J_3 \quad (2.16)$$

Agora, considere que a matriz  $M$  é simétrica como definido em (2.17).

$$M = M^T = \begin{bmatrix} M_1 & M_2^T \\ M_2 & M_3 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Então, o complemento de Shur de  $M$  em relação  $M_1$  e em relação a  $M_3$  são dados, respectivamente, por (2.18) e (2.19).

$$(M/M_1) = M_3 - M_2^T M_1^{-1} M_2 \quad (2.18)$$

$$(M/M_3) = M_1 - M_2 M_3^{-1} M_2^T \quad (2.19)$$

## 2.5 Relaxação de LMIs

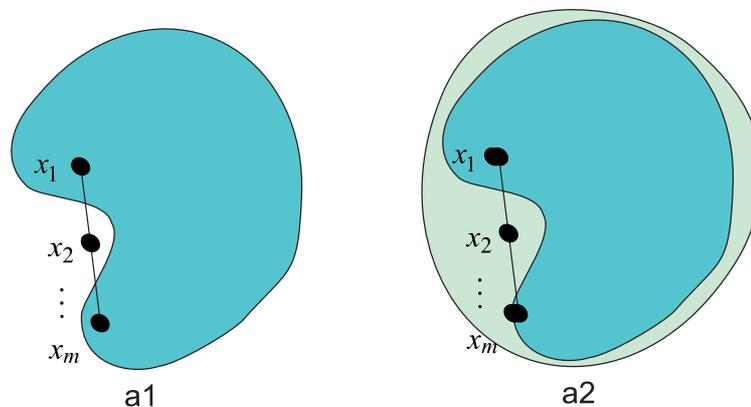
Conforme Costa (2017) um critério é considerado conservador quando satisfaz uma modelagem específica que está bem ajustada e normalizada em relação a um ponto de referência. Todavia, em situações em que os sistemas não estão bem ajustados, essas restrições conservadoras baseadas em LMIs podem não ser capazes de cumprir as condições necessárias para viabilizar o sistema.

De acordo com Cuzzola *et al.* (2002), a relaxação de LMIs é uma técnica utilizada para reduzir o nível de conservadorismo em uma modelagem específica. Segundo Rego (2019), a técnica de relaxação de LMIs amplia a região da solução modelo, com o propósito de torná-la factível, ao mesmo tempo em que minimiza o conservadorismo e otimiza o desempenho do controlador.

Cuzzola *et al.* (2002) propuseram um método de relaxação para contornar as restrições conservadoras de otimização em sistemas mal condicionados e demonstraram que esse método é capaz de ampliar os intervalos de operação do modelo LMI tradicional, chegando até o ponto de ruptura.

A Figura 3 fornece uma representação gráfica de uma técnica de relaxação em um problema de otimização com LMIs. Na Figura 2 (a), há soluções fora da região convexa, tornando a solução infactível. Na Figura 2 (b), a região convexa é expandida por meio da relaxação, tornando o modelo factível (CARVALHO, 2021).

Figura 2 – Factibilidade de um conjunto solução relaxado.



Fonte: adaptado de Carvalho (2021).

A metodologia de relaxação proposta por Cuzzola *et al.* (2002) consiste na suposição de que existe uma matriz  $G$  de relaxação invertível, não simétrica e semidefinida positiva, tal que  $G + G^T \geq 0$ , com ordem compatível com a matriz  $Q = Q^T \geq 0$ , em que  $Q^{-1} \geq 0$ . Neste contexto, Costa (2017) descreve a matriz  $G$  como a matriz de relaxação, que permite o processo de otimização encontrar uma solução quando o modelo não relaxado não consegue resolver o problema.

Multiplicando  $Q^{-1}$  por  $(G - Q)$  à direita e  $(G - Q)^T$  à esquerda, tem-se (2.20).

$$(G - Q)Q^{-1}(G - Q)^T \geq 0 \quad (2.20)$$

Considerando (2.21)

$$G \geq Q \Rightarrow G - Q \geq 0 \quad (2.21)$$

A desigualdade (2.22) é formulada.

$$G^T Q^{-1} G \geq G + G^T - Q \quad (2.22)$$

A expressão (2.22) é denominada condição de relaxação e garante a convergência e linearidade no sistema com restrição LMI com relaxação. Visando exemplificar a metodologia de relaxação proposta por Cuzzola *et al.* (2002), será utilizada a condição de estabilidade de Lyapunov em um sistema discreto com realimentação de estados, como definido em (2.23).

$$\bar{A}^T P \bar{A} - P < 0 \quad (2.23)$$

Fazendo  $\bar{A} = A + BK$  e  $P = Q^{-1}$  a expressão (2.23) é reescrita como (2.24).

$$(A + BK)^T Q^{-1} (A + BK) - Q^{-1} < 0 \quad (2.24)$$

Multiplicando (2.24) à esquerda por  $-G^T$ , à direita por  $G$  e rearranjando, tem-se (2.25).

$$\overbrace{G^T Q^{-1} G}^{M_1} - \underbrace{((A + BK)G)^T}_{M_2^T} \overbrace{Q^{-1}}^{M_3^{-1}} \underbrace{(A + BK)G}_{M_2} > 0 \quad (2.25)$$

Aplicando o complemento de Schur em (2.25) a desigualdade (2.26) é obtida.

$$\begin{bmatrix} G^T Q^{-1} G & * \\ (A + BK)G & Q \end{bmatrix} > 0 \quad (2.26)$$

Aplicando a condição (2.22) e fazendo  $K = YG^{-1}$  a LMI (2.27) é formulada.

$$\begin{bmatrix} G + G^T - Q & * \\ AG + BY & Q \end{bmatrix} > 0 \quad (2.27)$$

Portanto, a LMI (2.27) determina a condição de estabilidade de Lyapunov relaxada e os ganhos de realimentação em tempo discreto.

### 3 CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO

Este capítulo define, inicialmente, o conceito de um modelo de incertezas politópicas (seção 3.1). Ademais, apresenta fundamentos sobre o algoritmo *quasi-min-max*, no caso, o índice de predição utilizado e a restrição no sinal de controle (subseção 3.2). Nas subseções seguintes, discute-se sobre os diversos tipos de otimização que utilizaram o algoritmo *quasi-min-max*, como o controle por realimentação de estados *online*, realimentação de saída *online* e realimentação de saída *offline*.

#### 3.1 Modelo de incertezas politópicas

Considere o sistema no espaço de estados definido em (3.1)

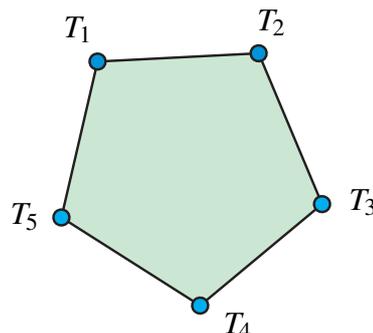
$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(p(k))x(k) + B(p(k))u(k) \\ y(k) &= C(p(k))x(k) \\ u(k) &= F(k)x(k) \end{aligned} \quad (3.1)$$

No sistema (3.1),  $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$  é o vetor de estados,  $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$  é o sinal de controle,  $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$  é a saída do sistema e  $p = [p_1, p_2, \dots, p_l] \in \mathbb{R}^l$  é o parâmetro variante. As matrizes  $A(p(k)) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $B(p(k)) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ ,  $C(p(k)) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$  e  $F(k)$  correspondem, respectivamente, aos estados, entrada, saída e ao ganho de realimentação.

Outra maneira de descrever o sistema LPV (3.1) é utilizando modelos politópicos. Conforme Gahinet *et al.* (1994), um polítopo pode ser caracterizado como na Definição 3

**Definição 3.** Um polítopo é definido como um conjunto poliedral limitado, representado por uma casca convexa  $C_o$  de um número finito de vértices  $T_n$ , onde qualquer ponto no polítopo pode ser obtido por uma combinação convexa desses vértices, como representado na Figura 3, em que  $\Omega = C_o\{T_1, T_2, \dots, T_5\}$ .

Figura 3 – Polítopo com cinco vértices.



Fonte: adaptado de Costa (2017).

Nesse caso, o parâmetro variante  $p(k)$  pertence a um polítopo convexo  $\mathcal{P}$ , ou seja

$$\sum_{w=1}^n p_w(k) = 1, \quad 0 \leq p_w(k) \leq 1. \quad (3.2)$$

Portanto, quando  $p_s = 1$  e  $p_w = 0$  para  $w = 1, 2, \dots, n$  e  $w \neq s$ , o modelo LPV (3.1) se reduz ao seu  $s$ -ésimo modelo linear local invariante no tempo, ou seja,  $[A(p(k)) \ B(p(k))] = [A_s \ B_s]$ . Então, à medida que  $p(k)$  varia dentro de seu polítopo  $\mathcal{P}$ , as matrizes do sistema LPV variam dentro de um polítopo correspondente  $\Omega$  cujos vértices consistem em  $n$  matrizes do sistema local, como representado na Eq. (3.3) (LU; ARKUN, 2000).

$$[A(p(k)) \ B(p(k))] \in \Omega = C_o[A_1 \ B_1], [A_2 \ B_2], \dots, [A_n \ B_n] \quad (3.3)$$

Na Eq. (3.3),  $C_o$  denota a casca convexa. Nessa descrição,  $p_w(k)$  pode representar uma variável física medida após ser normalizada ou pode ser interpretada como um peso variável no tempo atribuído ao  $w$ -ésimo modelo local (LU; ARKUN, 2000).

### 3.2 O algoritmo *Quasi-Min-Max*

O algoritmo *quasi-min-max* refere-se ao procedimento de otimização descrito na Eq. (3.4). O algoritmo recebe essa denominação devido minimizar o limite superior do valor da função objetiva do quase pior caso ao não incluir o custo do primeiro estágio na operação max (LU; ARKUN, 2000; PARK *et al.*, 2011; REGO; COSTA, 2023).

$$\min_{u(k+l|k)} \max_{[A(p(k+l))|B(p(k+l))], \Omega, m \geq 0} J_0^\infty(k) \quad (3.4)$$

$$J_0^\infty = \underbrace{\tilde{y}(k|k)^T L \tilde{y}(k|k) + u(k)^T R u(k|k)}_{J_0^1} + \underbrace{\sum_{l=1}^{\infty} [\tilde{y}(k+l|k)^T L \tilde{y}(k+l|k) + u(k+l|k)^T R u(k+l|k)]}_{J_1^\infty} \quad (3.5)$$

Na Eq. (3.5),  $u(k+l|k)$  é o sinal de controle e  $\tilde{y}(k+l|k)$  é uma saída controlada, que pode ser do sistema  $y(k)$  ou do observador de estados  $\hat{y}$ , no instante  $k+l$  preditos a partir do momento  $k$ . Ademais,  $R$  e  $L$  são matrizes de ponderação com dimensões adequadas para, respectivamente, os estados e o sinal de controle. Desse modo, a cada instante de amostragem, a ação de controle ótima é calculada minimizando o limite superior do valor quase pior de uma função objetivo quadrática de horizonte infinito.

Ademais, é possível incorporar uma restrição ao sinal de controle, como na Eq. (3.6).

$$|u_r(k)| < u_{r,\max}, \quad r = 1, 2, \dots, n_u, \quad k \geq 0 \quad (3.6)$$

Na Eq. (3.6),  $|u_r(k)|$  é o valor absoluto do sinal de controle, e  $u_{r,\max}$  denota o limite de pico dado na  $r$ -ésima entrada  $u_r(k)$ . Essa restrição de entrada pode ser expressa como desigualdade matricial linear e, então, ser incluída no problema de RMPC (LU; ARKUN, 2000; PARK *et al.*, 2011; REGO; COSTA, 2023).

### 3.2.1 Realimentação de estados com procedimento de resolução *online*

Lu e Arkun (2000) propuseram um esquema RMPC com realimentação de estados para sistemas LPV como apresentado na Eq. (3.1) com base no algoritmo *quasi-min-max* descrito na Eq. (3.4). Nessa metodologia, assume-se que não há incompatibilidade entre o modelo e a planta. Além disso, considera-se que tanto o parâmetro variante  $p(k)$  quanto os estados  $x(k)$  estão disponíveis em tempo real. Desse modo, a solução do problema de otimização é fornecida pelo Teorema 1.

**Teorema 1 (Lu e Arkun (2000)).** *O problema de otimização (3.4) com a lei de controle dada por  $u(k)$  pode ser resolvido pela seguinte programação semi-definida*

$$\min_{u(k), Q(k), Y(k)} \gamma \quad (3.7)$$

*Sujeito à:*

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ A(p(k))x(k) + B(p(k))u(k) & Q(k) & * & * \\ L^{1/2}x(k|k) & 0 & \gamma I & * \\ R^{1/2}u(k|k) & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.8)$$

$$\begin{bmatrix} Q(k) & * & * & * \\ A_w Q(k) + B_w Y(k) & Q(k) & * & * \\ L^{1/2}Q(k) & 0 & \gamma & * \\ R^{1/2}Y(k) & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.9)$$

*Restrição nos sinais:*

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad X_{rr} \leq u_{r,\max}^2, \quad r = 1, 2, \dots, n_u \quad (3.10)$$

$$\begin{bmatrix} Q & (A_w^T Q^T + B_w^T Y^T) C^T \\ C(A_w Q + B_w Y) & y_{\max}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad w = 1, 2, \dots, n \quad (3.11)$$

Em que o ganho de realimentação é dado por  $F(k) = Y(k)Q^{-1}$ .

**Prova do Teorema 1.** Ver Lu e Arkun (2000). ■

### 3.2.2 Realimentação de saída com procedimento de resolução *online*

Park *et al.* (2011) expandiram o método de Lu e Arkun (2000) para o esquema RMPC de realimentação de saída para lidar com uma ampla gama de sistemas restritos. De forma semelhante ao método de Lu e Arkun (2000), pressupõe-se que os parâmetros atuais variáveis no tempo são mensuráveis em cada etapa. No entanto, seus comportamentos futuros, que variam em um determinado polítopo, são incertos.

Nesse esquema RMPC, para prever os estados futuros do sistema (3.1), é utilizado o modelo da Eq. (3.12).

$$\hat{z}(k+1+m|k) = A(p(k+l))\hat{z}(k+l|k) + B(p(k+l))u(k+l|k) \quad (3.12)$$

Na Eq. (3.12),  $\hat{z}(k+l|k) = \hat{x}(k+l|k)$  e  $u(k+l|k)$  denotam o estado previsto de  $x(k+l)$  do sistema (3.1) e a entrada de controle futura para a etapa  $k+l$  estimada na etapa  $k$ , respectivamente.

**Teorema 2 (Park *et al.* (2011)).** Para o sistema LPV (3.1) sujeito à restrição de entrada (3.6), o problema de otimização (3.4) para encontrar  $u(k)$  e o ganho de realimentação  $F(k)$  na lei de controle futura  $u(k+l|k) = F(k)\hat{z}(k+l|k)$ ,  $l \geq 1$ , que minimiza o limite superior do pior caso  $\gamma(k)$  da função objetiva de horizonte infinito  $J_0^\infty$ , pode ser resolvido pelo seguinte problema de minimização.

$$\min_{u(k), Q(k), Y(k)} \gamma \quad (3.13)$$

Sujeito à:

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ T(k) & Q(k) & * & * \\ L^{1/2}\hat{x}(k|k) & 0 & \gamma I & * \\ R^{1/2}u(k|k) & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.14)$$

$$\begin{bmatrix} Q(k) & * & * & * \\ S_w(k) & Q(k) & * & * \\ L^{0,5}Q(k) & 0 & \gamma I & * \\ R^{0,5}Y(k) & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.15)$$

$$\gamma(k) - \gamma(k-1) < 0 \quad (3.16)$$

$$\gamma(k)I - \varepsilon Q(k) > 0 \quad (3.17)$$

*Restrições de entrada:*

$$\begin{bmatrix} u_r(k) & -u_{r,\max} \\ -u_{r,\max} & -u_r(k) \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} X(k) & Y(k)^T \\ Y(k) & Q(k) \end{bmatrix} < 0, \quad X_{rr} < u_{r,\max}^2 \quad (3.18)$$

Nas LMIs (3.14) e (3.15),  $T(k) = A(p(k))\hat{x}(k) + B(p(k))u(k) + Lp(y(k) - C\hat{x}(k))$  e  $S_w(k) = A_w Q(k) + B_w Y(k)$ , respectivamente. Se existirem  $u(k|k)$ ,  $Y(k)$  e  $Q(k)$  para os dados  $\hat{x}(k)$  e  $y(k)$ , o ganho de realimentação  $F(k)$  é obtido por  $F(k) = Y(k)Q(k)^{-1}$ .

**Prova do Teorema 2.** Ver Park *et al.* (2011). ■

Para realizar esse procedimento de otimização, é necessário calcular previamente o ganho do observador de estados  $L_p$  de forma *offline* e, então, calcular  $\hat{x}$  no procedimento *online*. Nesse sentido, Park *et al.* (2011) propuseram o Teorema 3 para calcular o ganho do observador estados em termos de LMI.

**Teorema 3 (Park *et al.* (2011)).** Se existir matriz  $P_0 > 0$  e  $Y_0 = P_0 L_p$  que satisfaçam a restrição LMI (3.19).

$$\begin{bmatrix} \rho^2 P_0 - L_e & P_0^T A_w^T - Y_0^T C_w^T \\ P_0 A_w - Y_0 C_w & P_0 \end{bmatrix} > 0 \quad (3.19)$$

Então, o ganho do observador  $L_p$  é obtido por  $L_p = P_0^{-1} Y_0$ , e a estabilidade do erro dinâmico  $e(k+1) = (A(p(k)) - L_p C)e(k)$  é garantida para qualquer  $[A(p(k))|B(p(k))] \in \Omega$ .

**Prova do Teorema 3.** Ver Park *et al.* (2011). ■

### 3.2.3 Realimentação de saída com procedimento de resolução *offline* relaxado

Rego e Costa (2023) formularam um método com realimentação de saída *offline* que combina as técnicas encontradas em Kim e Lee (2017), Park *et al.* (2011), Wada e Saeki (2016) e Wan e Kothare (2003). A combinação resulta em uma estratégia RMPC para sistemas LPV otimizada por LMIs, em que os ganhos podem ser implementados *offline* utilizando uma *Look-up table*. Por meio do Teorema 4, obtém-se os ganhos de realimentação de saída.

**Teorema 4 (Rego e Costa (2023)).** *Para o sistema LPV (3.1) sujeito à restrição no sinal de controle (3.6), considere o problema de otimização dado por*

$$\min_{u(k), Q(k), Y(k)} \gamma \quad (3.20)$$

*Sujeito à:*

$$\begin{bmatrix} X(k) + X(k)^T - Q_w(p(k)) & * & * & * \\ A(p(k))X(k) + B(p(k))Y(p(k)) & Q_w(p(k)) & * & * \\ L^{1/2}X(k) & 0 & \gamma I & * \\ R^{1/2}Y(p(k)) & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.21)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ T(k) & Q_w(p(k)) & * & * \\ L^{1/2}\hat{x}(k|k) & 0 & \gamma I & * \\ R^{1/2}u(k|k) & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.22)$$

$$\gamma(X(k) + X(k)^T - Q_w(k)) - \varepsilon X(k)^T X(k) > 0 \quad (3.23)$$

*Restrições adicionais:*

$$\begin{bmatrix} u_{i\max}^2 & Y^T \\ Y & X + X^T - Q_w \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & \hat{z}(k) \\ \hat{z}(k)^T & Q_w \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.24)$$

Na LMI (3.22),  $T(k) = A(p(k))\hat{x}(k) + B(p(k))u(k) + L_p(y(k) - C\hat{x}(k))$ . Se existirem  $u(k)$ ,  $Y(k)$ ,  $X(k)$  e  $Q_w(p(k))$  para determinados  $\hat{x}(k)$  e  $y(k)$ , o ganho de realimentação  $F(k)$  é obtido por  $F(p(k)) = Y(p(k))X(k)^{-1}$ .

**Prova do Teorema 3.** Ver Rego e Costa (2023). ■

## 4 CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO COMUTADO

Este capítulo apresenta uma introdução sobre os sistemas chaveados (seção 4.1). Ademais, são abordados conceitos referentes à desigualdade de Lyapunov-Metzler para o tempo discreto (seção 4.2). Em seguida, é formulado o controle com realimentação de saída via *quasi-min-max* comutado (seção 4.3). Além disso, também é abordado sobre o observador de estados comutado com matriz de ponderação (subseção 4.3.1) e o critério de estabilidade robusta controlador-observador para o algoritmo utilizado neste trabalho (subseção 4.3.2).

### 4.1 Introdução aos sistemas comutados

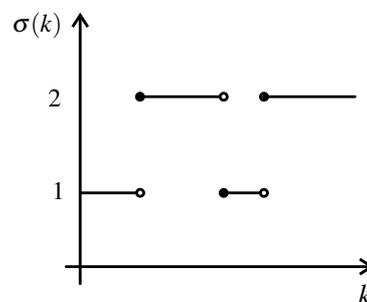
Um sistema sujeito a comutação pode ser descrito por (4.1) quando todos os subsistemas individuais são lineares.

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) \quad (4.1)$$

Em (4.1),  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  são os estados do sistema e  $A_{\sigma(k)} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  representa um conjunto de matrizes  $\{A_1, \dots, A_N\}$ , em que  $\sigma(k) = i$  pertence ao conjunto  $\mathbb{K}$  de índices positivos com dimensão finita e  $N$  é a quantidade de subsistemas disponíveis para comutação. A função  $\sigma(k)$  desempenha o papel de uma regra de comutação, especificando o índice  $i \in \mathbb{K}$  do conjunto em cada instante de tempo  $k$  (GEROMEL; COLANERI, 2006; LIBERZON, 2003).

A Figura 4 ilustra o sinal de uma regra de comutação para um sistema formado por dois subsistemas, isto é,  $\mathbb{K} = \{1, 2\}$ . Nessa figura, o sinal de chaveamento é caracterizado por descontinuidades em cada intervalo de tempo. Além disso,  $\sigma(k)$  assume um valor em cada intervalo de tempo (LIBERZON, 2003).

Figura 4 – Sinal chaveado.



Fonte: adaptado de Liberzon (2003)

De acordo com Deaecto e Geromel (2018), a comutação pode levar a situações em que um conjunto de subsistemas inicialmente estáveis resulta em um sistema global instável, en-

quanto um conjunto de subsistemas inicialmente instáveis pode levar a uma saída global estável. Logo, a estabilidade de sistemas sujeitos a comutação não apenas se baseia na dinâmica dos subsistemas, mas também nas características da regra de comutação.

## 4.2 Desigualdade de Lyapunov-Metzler

Conforme Geromel e Colaneri (2006), a estabilidade global do sistema (4.1) é alcançada utilizando a função de Lyapunov quadrática por partes descrita em (4.2).

$$v(x) = \min_{i \in \mathbb{K}} x^T P_i x = \min_{\lambda \in \Lambda} \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i x^T P_i x \right) \quad (4.2)$$

Em (4.2),  $P_i$  são as matrizes de estabilidade dos  $N$  subsistemas disponíveis para chaveamento e  $\lambda \in \mathbb{R}^N$  são valores escalares contidos no conjunto convexo  $\Lambda$  definido em (4.3).

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\} \quad (4.3)$$

Pode-se observar que a equação (4.2) não é diferenciável em pontos onde a minimização não é única. Nesse contexto, Geromel e Colaneri (2006) abordam o conjunto de índices  $I(x)$ , definido como  $I(x) = \{i \in \mathbb{K} : v(x) = x^T P_i x\} \subset \mathbb{K}$ , e quando a minimização não é única, é destacado que o conjunto  $I(x)$  contém mais de um elemento.

Para solucionar esse problema, Geromel e Colaneri (2006) propõe a utilização de uma classe de submatrizes conhecida como matrizes de Metzler ( $\mathcal{M}$ ), cuja definição está apresentada na equação (4.4).

$$\mathcal{M} = \begin{cases} \pi_{ji} \geq 0, & i \neq j \\ \sum_{i=1}^N \pi_{ji} = 0, & \forall i, j \end{cases} \quad (4.4)$$

Na equação (4.4), todos os elementos da diagonal principal da classe de submatrizes são não-positivos, ou seja,  $\pi_{ii} \leq 0, \forall i \in \mathbb{K}$ . Com essa subclasse de matrizes, Geromel e Colaneri (2006) desenvolveram o **Teorema 5**, que estabelece uma desigualdade matricial e uma regra de comutação para a estabilização do sistema descrito em (4.1).

**Teorema 5** (Desigualdade de Lyapunov-Metzler (GEROMEL; COLANERI, 2006)). *Suponha que exista um conjunto de matrizes simétricas semidefinidas positivas  $P_i = \{P_1, \dots, P_N\}$  e uma matriz  $\Pi \in \mathcal{M}$  que satisfazem a desigualdade de Lyapunov-Metzler*

$$A_i^T \left( \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j \right) A_i - P_i < 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (4.5)$$

Então a regra de comutação

$$\sigma(x(k)) = \arg \min_{i=1, 2, 3, \dots, N} x(k)^T P_i x(k) \quad (4.6)$$

Leva o sistema (4.1) a um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

**Prova do Teorema 5.** Ver Geromel e Colaneri (2006). ■

A obtenção das matrizes de estabilidade  $P_i$  através de *solvers*, com base na otimização convexa da desigualdade (4.5), é inviável devido à sua natureza não convexa ocasionada pelo produto de variáveis  $\pi_{ji}P_i$ . Para resolver esse problema, Geromel e Colaneri (2006) propuseram uma abordagem mais conservadora, o **Corolário 1**, que se baseia em uma subclasse de matrizes de Metzler com elementos iguais na diagonal principal.

**Corolário 1** (Desigualdade de Lyapunov-Metzler modificada (GEROMEL; COLANERI, 2006)).  
Suponha que existe um conjunto de matrizes simétricas semidefinidas positivas  $P_i \in \{P_1, \dots, P_N\}$  e um escalar positivo  $\eta$  que satisfazem a desigualdade de Lyapunov-Metzler modificada

$$A_i^T (\eta P_i + (1 - \eta) P_j) A_i - P_i < 0, \quad i \neq j = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (4.7)$$

Então a regra de comutação (4.6) leva o sistema (4.1) a um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

**Prova do Corolário 1.** Ver Geromel e Colaneri (2006). ■

### 4.3 Quasi-Min-Max RMPC via Realimentação de saída comutada

Considere o sistema LPV comutado representado na Eq. (4.8).

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{\sigma(k)}(p(k))x(k) + B_{\sigma(k)}(p(k))u(k) \\ y(k) &= C_{\sigma(k)}x(k) + D_{\sigma(k)}u(k) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Na Eq. (4.8),  $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$  é o vetor de estados,  $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$  é o sinal de controle,  $p(k)$  é o parâmetro variante mensurável,  $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$  é a saída do sistema. Além disso,  $A_{\sigma(k)}(p(k)) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  é a matriz de estados,  $B_{\sigma(k)}(p(k)) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$  é a matriz de entrada,  $C_{\sigma(k)} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$  é a matriz saída e  $D_{\sigma(k)} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$  é a matriz de transição direta. O índice  $\sigma(k) \in \mathbb{K}$ , em que  $\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, N\}$ , indica um dado modelo local selecionado pela lei de comutação do conjunto composto pelos  $N$  Subsistemas, que descrevem a dinâmica do modelo global, disponível para comutação.

Considerando que os estados do sistema na Eq. (4.8) não são totalmente mensuráveis, é proposto o observador de estado comutado descrito na Eq. (4.9) tomando como base Park *et al.* (2011) e Wan e Kothare (2002).

$$\hat{x}(k+1) = A_{\sigma(k)}(p(k))\hat{x}(k) + B_{\sigma(k)}(p(k))u(k) + L_{\sigma(k)}(y(k) - C_{\sigma(k)}\hat{x}(k)) \quad (4.9)$$

Na Eq. (4.9),  $\hat{x}(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$  são os sinais de estados estimados de  $x(k)$ ,  $L_{\sigma(k)} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$  é o conjunto de ganhos estimados do observador e  $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$  é a saída do sistema. Se o conjunto das matrizes  $A_{\sigma(k)}(p(k))$  e  $B_{\sigma(k)}(p(k))$  forem conhecidas, então  $y(k)$  e  $\hat{x}(k)$  podem ser calculados em passos discretos de amostragem  $k$  utilizando o observador de estados.

Em contraste aos trabalhos de Park *et al.* (2011), Kim e Lee (2017) e Rego e Costa (2023), a metodologia proposta neste trabalho leva em consideração a ação da lei de comutação no esquema RMPC. Nesse sentido, a regra de comutação definida em Geromel e Colaneri (2006) é reformulada para depender dos estados estimados do sistema, tomando como base a função de Lyapunov descrita em Park *et al.* (2011). Portanto, é definido o critério de estabilidade de Lyapunov para sistema de espaço de estados previsto comutado apresentado na Eq. (4.10) e considera-se a lei de comutação dada na Eq. (4.11),

$$V(\hat{z}(k|k), \sigma(k)) = \hat{z}(k|k)^T P_{\sigma(k)} \hat{z}(k|k) \quad (4.10)$$

$$\sigma(\hat{z}(k)) = \arg \min_{\sigma(k)=1, \dots, N} \hat{z}(k|k)^T P_{\sigma(k)} \hat{z}(k|k) \quad (4.11)$$

Nas Eqs. (4.10) e (4.11),  $P_{\sigma(k)}$  é a matriz de estabilidade do respectivo subsistema e  $\hat{z}(k|k)$  corresponde aos estados previstos do sistema global. A lei de comutação  $\sigma(k)$  é uma função dos estados estimados do sistema e indica que a respectiva matriz está sujeita a comutação em cada instante de tempo  $k$ . Além disso, assim como em Kothare *et al.* (1996), Park *et al.* (2011) e Rego e Costa (2023) considera-se a restrição imposta ao sinal de controle descrita na Eq. (4.12).

$$|u_r(k)| < u_{r,\max}, \quad r = 1, 2, \dots, n_u, \quad k \geq 0 \quad (4.12)$$

Na Eq. (4.12),  $|u_r(k)|$  é o valor absoluto,  $u_{r,\max}$  representa o limite máximo dado à  $r$ -ésima entrada  $u_r(k)$  e  $n_u$  é o tamanho da matriz do sinal de entrada. O esquema RMPC comutado proposto adota o seguinte sistema de espaço de estados de previsão baseado na Eq. (4.13).

$$\hat{z}(k+1+l|k) = A_{\sigma(k+l)}(p(k+l))\hat{z}(k+l|k) + B_{\sigma(k+l)}(p(k+l))u(k+l|k) \quad (4.13)$$

Na Eq. (4.13),  $\hat{z}(k+l|k)$  e  $u(k+l|k)$  representam, respectivamente, o estado previsto de  $x(k+l)$  do sistema da Eq. (4.8) e a futura entrada de controle para a etapa  $k+l$  estimada na etapa  $k$  e  $\hat{z}(k+1) = \hat{x}(k+1)$ . Como delineado por Park *et al.* (2011), seja  $\hat{z}(k|k) := \hat{x}(k)$ . A entrada de controle  $u(k|k)$  é o primeiro elemento da sequência de controle calculada; isto é,  $u(k) = u(k|k)$ . Para calcular o restante da futura sequência de controle utiliza-se a Eq. (4.14).

$$u(k+l|k) = F_{\sigma(k)}(p(k))\hat{z}(k+l|k) \quad (4.14)$$

Na Eq. (4.14),  $F_{\sigma(k)}(p(k)) \in \mathbb{R}^{n_x}$  é o ganho de realimentação de estado discreto que comuta de acordo com a regra de comutação definida na Eq. (4.11). Objetivando determinar os ganhos de realimentação  $F_{\sigma(k)}(p(k))$  do controlador da Eq. (4.14) e as matrizes de estabilidade  $P_{\sigma(k)}$  da regra de comutação da Eq. (4.11), considere o problema de otimização da Eq. (4.15).

$$\min_{u(k+l|k)} \max_{(A_{\sigma(k+l)}, B_{\sigma(k+l)}), l \geq 0} \bar{J}_{\infty}(k) \quad (4.15)$$

Com

$$\bar{J}_{\infty}(k) = J_{\infty}(k) + J_o(k) \quad (4.16)$$

Sujeito a (4.8), (4.9), (4.12)-(4.14). Em que  $J_{\infty}(k)$  e  $J_o(k)$  são dadas por (4.17) e (4.18), respectivamente.

$$J_{\infty}(k) = \sum_{l=1}^{\infty} [\hat{z}(k+l|k)^T R_z \hat{z}(k+l|k) + u(k+l|k)^T R_u u(k+l|k)] \quad (4.17)$$

$$J_o(k) = \hat{z}(k|k)^T R_z \hat{z}(k|k) + u(k|k)^T R_u u(k|k) \quad (4.18)$$

Nas Eqs. (4.17) e (4.18),  $R_z$  e  $R_u$  são matrizes de ponderação com dimensões adequadas para, respectivamente, os estados e o sinal de controle. De acordo com Park *et al.* (2011) e Rego e Costa (2023), o problema minimiza o limite superior do pior caso da função objetivo quadrática  $\bar{J}_{\infty}$ , que é a soma do custo da primeira fase  $J_0$  e do custo terminal correspondente ao limite superior de  $J_{\infty}$ .

O limite superior do pior caso em  $J_{\infty}$  é abordado em diversos trabalhos na literatura, a exemplo de Kothare *et al.* (1996), Lu e Arkun (2000), Cuzzola *et al.* (2002) e Rego e Costa (2023). Todavia, esses trabalhos não consideram a modelagem para sistemas comutados. Em contraste, o presente trabalho tem como uma de suas contribuições a derivação desse índice para sistemas comutados. Nesse sentido, primeiramente é necessário definir uma função de Lyapunov como em (4.19).

$$V(\hat{z}(k+l|k)) = \min_{\sigma(k)=1,\dots,N} \hat{z}(k+l|k)^T P_i \hat{z}(k+l|k) \quad (4.19)$$

$$= \min_{\phi \in \Phi} \left( \sum_{i=1}^N \phi_i \hat{z}(k+l|k)^T P_i \hat{z}(k+l|k) \right) \quad (4.20)$$

Na Eq. (4.19),  $i = \sigma(k)$  e  $P_i = P_i^T \in \{P_1, \dots, P_N\}$ , para  $N \geq 2$  inteiro e  $\phi_i$  são escalares contidos no conjunto convexo definido na Eq. (4.21).

$$\Psi = \left\{ \psi \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \phi_i = 1, \phi_i \geq 0 \right\} \quad (4.21)$$

Então, suponha que  $V(\hat{z}(k+l|k))$  garanta a condição de estabilidade assintótica discreta a cada instante de tempo  $k$ , como se vê na Eq. (4.22).

$$\begin{aligned} V(\hat{z}(k+1+l)) - V(\hat{z}(k+l|k)) \\ \leq - [\hat{z}(k+l|k)^T R_z \hat{z}(k+l|k) + u(k+l|k)^T R_u u(k+l|k)] \end{aligned} \quad (4.22)$$

Somando (4.22) de  $l = 0$  a  $\infty$ , obtém-se a restrição em (4.23).

$$\max_{(A_{\sigma(k+l)}, B_{\sigma(k+l)}), l \geq 0} J_{\infty}(k) < V(\hat{z}(k+l|k)) \quad (4.23)$$

Na restrição (4.23),  $J_{\infty}(k) = \sum_{l=0}^{\infty} [\hat{z}(k+l|k)^T R_z \hat{z}(k+l|k) + u(k+l|k)^T R_u u(k+l|k)]$ .

Logo, o problema de otimização quasi-min-max para o RMPC comutado proposto pode ser definido na Eq. (4.24).

$$\min_{u(k+l|k), P_{\sigma(k)}} \gamma(k) \quad (4.24)$$

Sujeito a (4.8), (4.9), (4.12)-(4.14), (4.22) e a restrição adicional (4.25) ao desempenho do sistema.

$$\hat{z}(k|k)^T R_z \hat{z}(k|k) + u(k|k)^T R_u u(k|k) + \hat{z}(k+1|k)^T P_{\sigma(k)} \hat{z}(k+1|k) < \gamma(k) \quad (4.25)$$

Na restrição (4.25),  $\gamma(k)$  é uma variável não negativa adequada a ser minimizada. Em Park *et al.* (2011), é considerada a restrição de estabilidade (4.26) para garantir a estabilidade robusta.

$$\gamma(k) < \gamma(k-1) \quad (4.26)$$

Contudo, Su e Tan (2012) e Kim e Lee (2017) afirmam que a condição adicional (4.26) compromete a viabilidade recursiva do problema de otimização. Por esse motivo, a restrição (4.26) não é utilizada. Além disso, como  $P_{\sigma(k)}$  da restrição de desempenho (4.25) varia ao longo do tempo conforme a regra de comutação, é necessário uma restrição adicional para a estabilidade robusta. Se  $P_{\sigma(k)}$  tiver um valor muito pequeno perto de zero,  $\hat{z}(k+1|k)$  pode ser muito grande mesmo quando  $\hat{z}(k+1|k)^T P_{\sigma(k)} \hat{z}(k+1|k)$  se torna quase zero. Por conseguinte, para evitar esse problema, considera-se a seguinte restrição adicional.

$$P_{\sigma(k)} > \varepsilon I \quad (4.27)$$

Na condição (4.27),  $\varepsilon > 0$  é um escalar ajustado pelo projetista e  $I$  é a matriz identidade de ordem apropriada. Essa condição é importante para auxiliar na formulação do Teorema 6 e assegurar a robustez do sistema durante a ação de comutação. Além disso, para garantir que o sinal de controle da Eq. (4.14) satisfaça o limite  $u_{r,\max}$  atribuído em (4.12) para o sistema LPV comutado, o Lemma 1 é proposto.

**Lemma 1** (Restrição de entrada para sistemas LPV comutados). *Se existirem matrizes  $V_{\sigma(k)} = V_{\sigma(k)}^T \in \{V_1, \dots, V_N\}$ ,  $G_{\sigma(k)} \neq G_{\sigma(k)}^T \in \{G_1, \dots, G_N\}$ ,  $Q_{\sigma(k)} = Q_{\sigma(k)}^T \in \{Q_1, \dots, Q_N\}$  e  $U_{\sigma(k)}^T(p(k)) \in \{U_1(p(k)), \dots, U_N(p(k))\}$  que satisfaçam a restrição (4.28) para os  $N$  Subsistemas,*

$$\begin{bmatrix} V_{\sigma(k)} & * \\ U_{\sigma(k)}^T(p(k)) & G_{\sigma(k)} + G_{\sigma(k)}^T - Q_{\sigma(k)} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.28)$$

Na LMI (4.28),  $V_{\sigma(k)}^r < u_{r,\max}^2$ ,  $r = 1, 2, \dots, n_u$ . Então, a restrição de entrada,  $|u_r(k)| < u_{r,\max}$ , é garantida.

**Prova do Lema 1 (Proposto).** Para resolver o problema de otimização, é necessário considerar a restrição futura do sinal de controle  $u(k+l)$ . Para essa restrição, leve em conta que o módulo do sinal de controle deve ser menor ou igual ao sinal máximo permitido, conforme expresso em (4.29).

$$|u_r(k+l)| \leq u_{r,\max}, \quad r = 1, 2, \dots, n_u, \quad l \geq 1 \quad (4.29)$$

$$\max |u_r(k+l)|^2 = \max |U_i(p)Q_i^{-1}\hat{x}(k+l)_r|^2 \quad (4.30)$$

$$\leq \max |U_i(p)Q_i^{-1}\hat{x}_r|^2 \quad (4.31)$$

$$\leq \|(U_i(p)Q_i^{-1/2})_r\|_2^2 \quad (4.32)$$

$$= (U_i(p)Q_iU_i(p)^T)_{rr} \quad (4.33)$$

Multiplicando (4.33) por  $G_i^T$  á esquerda e  $G_i$  à direita tem-se (4.34).

$$(U_i(p)G_i^T Q_i^{-1}G_iU_i(p)^T)_{rr} \quad (4.34)$$

Aplicando o procedimento de relaxação apresentado por Cuzzola *et al.* (2002), segue (4.35).

$$= (U_i(p)(G_i + G_i^T - Q_i)U_i(p)^T)_{rr} \quad (4.35)$$

Aplicando o complemento de Schur a (4.35) e assumindo a existência de uma variável semidefinida positiva,  $V_i^r \leq u_{r,\max}^2$ , em que  $r = 1, 2, \dots, n_u$ , é formulada a LMI (4.36).

$$\begin{bmatrix} V_i & * \\ U_i(p)^T & G_i + G_i^T - Q_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.36)$$

Portanto, se existir uma matriz  $V_i$  tal que  $V_i^r \leq u_{r,\max}^2$ , é garantido que  $|u_r(k+l)| \leq u_{r,\max}$ ,  $r = 1, 2, \dots, n_u$ ,  $n_u \geq 1$ . ■

Para alcançar a estabilidade do sistema da Eq. (4.8), o problema de otimização é modelado matematicamente utilizando a técnica *quasi-min-max* e a desigualdade de Lyapunov-Metzler para sistemas discretos sujeitos a comutação. Com base nessa abordagem, é formulado o Teorema 6 que tem como objetivo propor condições via LMIs para obter as matrizes de estabilidade  $P_{\sigma(k)}$  e os ganhos de realimentação  $F_{\sigma(k)}(p(k))$  ambos comutados pela regra de comutação na Eq. (4.11).

**Teorema 6** (SOF-RMPC para sistemas LPV comutados). *Se existirem matrizes  $Q_{\sigma(k)} = Q_{\sigma(k)}^T \geq 0$ ,  $G_{\sigma(k)} > 0$ , escalares  $v$  e  $\varepsilon$  positivos, e matrizes de ponderação  $R_z$  e  $R_u$  para  $\hat{x}(k)$  e  $u(k)$ , tal que que o processo de otimização (4.37) seja factível para  $\sigma(k) \neq \sigma(k+1)$ , em que  $N$  representa a quantidade de Subsistemas disponíveis para comutação.*

$$\min_{u(k), U_{\sigma(k)}(p(k)), G_{\sigma(k)}} \gamma(k) \quad (4.37)$$

Sujeito a (4.9), (4.28), (4.63) e

$$\begin{bmatrix} G_{\sigma(k)} + G_{\sigma(k)}^T - Q_{\sigma(k)} & * & * & * & * & * \\ \mathcal{N}_{\sigma(k)}(p(k)) & Q_{\sigma(k+1)} & * & * & * & * \\ \mathcal{N}_{\sigma(k)}(p(k)) & 0 & vQ_{\sigma(k)} & * & * & * \\ \mathcal{N}_{\sigma(k)}(p(k)) & 0 & 0 & -vQ_{\sigma(k+1)} & * & * \\ R_z^{1/2}G_{\sigma(k)} & 0 & 0 & 0 & \gamma(k)I & * \\ R_u^{1/2}U_{\sigma(k)}(p(k)) & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma(k)I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.38)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ \mathcal{T}_{\sigma(k)}(p(k)) & vQ_{\sigma(k)} & * & * \\ R_z^{1/2}\hat{x}(k) & 0 & \gamma(k)I & * \\ R_u^{1/2}u(k) & 0 & 0 & \gamma(k)I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.39)$$

$$\begin{bmatrix} G_{\sigma(k)} + G_{\sigma(k)}^T - Q_{\sigma(k)} & * \\ \varepsilon^{1/2}G_{\sigma(k)} & \gamma(k)I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.40)$$

Nas LMIs (4.38) e (4.39),  $\mathcal{N}_{\sigma(k)}(p(k)) = A_{\sigma(k)}(p(k))G_{\sigma(k)} + B_{\sigma(k)}(p(k))U_{\sigma(k)}(p(k))$  e  $\mathcal{T}_{\sigma(k)}(p(k)) = A_{\sigma(k)}(p(k))\hat{x}(k) + B_{\sigma(k)}(p(k))u(k) + L_{\sigma(k)}(y(k) - C_{\sigma(k)}\hat{x}(k))$ . Então, a lei de comutação da Eq. (4.11) com  $P_{\sigma(k)} = \gamma(k)Q_{\sigma(k)}^{-1}$  e a lei de controle  $u(k) = F_{\sigma(k)}(p(k))\hat{x}(k)$  com  $F_{\sigma(k)}(p(k)) = U_{\sigma(k)}(p(k))G_{\sigma(k)}^{-1}$ , levam o sistema da Eq. (4.8) em malha fechada via realimentação de saída a um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

**Prova do Teorema 6 (Proposto).** A demonstração do Teorema 6 é dividida em três partes. As LMIs (4.38) e (4.39) são modeladas por meio da resolução do problema de otimização quasi-min-max (4.15) com (4.24) e (4.25), enquanto a LMI (4.40) segue da condição de estabilidade robusta comutada apresentada em (4.27).

Primeiramente, a LMI (4.38) baseia-se no critério de estabilidade de Lyapunov para sistemas sujeitos a comutação em tempo discreto que foi apresentado na Eq. (4.19) e na condição de estabilidade assintótica discreta apresentada na Eq. (4.22). Além disso, considere a classe de matrizes Metzler denotadas por  $\mathcal{M}$  constituído por todas as matrizes  $\Pi \in \mathbb{R}^{N \times N}$  com elementos tais quais (4.41) (GEROMEL; COLANERI, 2006).

$$\pi_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N \pi_{ij} = 1, \quad \forall i, j \quad (4.41)$$

Desse modo, é possível formular (4.42).

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+l|k)^T \bar{A}_i(p)^T \left( \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j \right) \bar{A}_i(p) \hat{x}(k+l|k) - \hat{x}(k+l|k)^T P_i \hat{x}(k+l|k) \leq \\ - (\hat{x}(k+l|k)^T R_z \hat{x}(k+l|k) + u(k+l|k)^T R_u u(k+l|k)) \end{aligned} \quad (4.42)$$

A expressão (4.42) pode ser reescrita como em (4.43).

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+l|k)^T \bar{A}_i(p)^T \left( \pi_{ii} P_i + \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} P_j \right) \bar{A}_i(p) \hat{x}(k+l|k) - \hat{x}(k+l|k)^T P_i \hat{x}(k+l|k) \leq \\ - (\hat{x}(k+l|k)^T R_z \hat{x}(k+l|k) + u(k+l|k)^T R_u u(k+l|k)) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Note que a utilização de solvers de otimização lineares seria inviável devido à natureza não convexa de (4.43). Para contornar esse problema, é utilizada uma abordagem mais conservadora proposta por Geromel e Colaneri (2006), que se baseia em uma subclasse de matrizes de Metzler com elementos iguais na diagonal principal, isto é,  $\pi_{ii} = \eta$  e os elementos restantes satisfazendo (4.44).

$$(1 - \eta)^{-1} \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} = 1 \quad (4.44)$$

Então, por inspeção, é possível reescrever (4.42) como em (4.45)

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+l|k)^T (\bar{A}_i(p)^T (\eta P_i + (1 - \eta) P_j) \bar{A}_i(p) - P_i) \hat{x}(k+l|k) \leq \\ - (\hat{x}(k+l|k)^T R_z \hat{x}(k+l|k) + u(k+l|k)^T R_u u(k+l|k)) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Em (4.45),  $i = \sigma(k)$ ,  $j = \sigma(k+1)$  e  $\eta > 0$  é um parâmetro de projeto escalar. Substituindo a ação de controle  $u(k+l|k) = F_i(p) \hat{x}(k+l|k)$ , a expressão (4.45) pode ser reescrita como em (4.46).

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+l|k)^T (\bar{A}_i(p)^T (\eta P_i + (1 - \eta) P_j) \bar{A}_i(p) - P_i) \hat{x}(k+l|k) \leq \\ - \hat{x}(k+l|k)^T (R_z + F_i(p)^T R_u F_i(p)) \hat{x}(k+l|k) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Logo, a partir de (4.46), segue (4.47).

$$\bar{A}_i(p)^T (\eta P_i + (1 - \eta) P_j) \bar{A}_i(p) - P_i \leq -R_z - F_i(p)^T R_u F_i(p) \quad (4.47)$$

Ao reorganizar a desigualdade (4.47) na forma de (4.48), torna-se evidente as contribuições da desigualdade de Lyapunov em relação aos termos associados a Metzler e a parte relacionada ao índice  $J_\infty$ .

$$\underbrace{\bar{A}_i(p)^T P_j \bar{A}_i(p) - P_i}_{\text{Lyapunov}} + \overbrace{\bar{A}_i(p)^T (\eta P_i) \bar{A}_i(p) - \bar{A}_i(p)^T (\eta P_j) \bar{A}_i(p)}^{\text{Metzler}} \leq \underbrace{-R_z - F_i(p)^T R_u F_i(p)}_{J_\infty(k)} \quad (4.48)$$

Substituindo  $\bar{A}_i(p) = A_i(p) + B_i(p)F_i(p)$ , (4.49) é formulado.

$$\begin{aligned}
& (A_i(p) + B_i(p)F_i(p))^T P_j (A_i(p) + B_i(p)F_i(p)) - P_i + \\
& (A_i(p) + B_i(p)F_i(p))^T (\eta P_i) (A_i(p) + B_i(p)F_i(p)) - \\
& (A_i(p) + B_i(p)F_i(p))^T (\eta P_j) (A_i(p) + B_i(p)F_i(p)) \leq \\
& -R_z - F_i(p)^T R_u F_i(p)
\end{aligned} \tag{4.49}$$

A partir da desigualdade (4.49) é realizada a substituição de variáveis  $P_i = \gamma Q_i^{-1}$ ,  $P_j = \gamma Q_j^{-1}$  e  $\eta = \nu^{-1}$  para obter (4.50).

$$\begin{aligned}
& (A_i(p) + B_i(p)F_i(p))^T (\gamma Q_j)^{-1} (A_i(p) + B_i(p)F_i(p)) - (\gamma Q_i)^{-1} + \\
& (A_i(p) + B_i(p)F_i(p))^T (\gamma \nu Q_i)^{-1} (A_i(p) + B_i(p)F_i(p)) - \\
& (A_i(p) + B_i(p)F_i(p))^T (\gamma \nu Q_j)^{-1} (A_i(p) + B_i(p)F_i(p)) \leq \\
& -R_z - F_i(p)^T R_u F_i(p)
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Multiplicando (4.50) por  $-\gamma^{-1}$  e reorganizando em (4.51).

$$\begin{aligned}
& Q_i^{-1} - (A_i(p) + B_i(p)F_i(p))^T Q_j^{-1} (A_i(p) + B_i(p)F_i(p)) + \\
& (A_i(p) + B_i(p)F_i(p))^T (\nu Q_i^{-1}) (A_i(p) + B_i(p)F_i(p)) + \\
& (A_i(p) + B_i(p)F_i(p))^T (\nu Q_j^{-1}) (A_i(p) + B_i(p)F_i(p)) \geq \\
& \gamma^{-1} R_z + F_i(p)^T \gamma^{-1} R_u F_i(p)
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Multiplicando (4.51) à esquerda por  $G_i^T$  e à direita por  $G_i$  e em seguida Aplicando o complemento de Schur múltiplas vezes a (4.51), a LMI (4.52) é formulada.

$$\begin{bmatrix}
G_i^T Q_i^{-1} G_i & * & * & * & * & * \\
(A_i(p) + B_i(p)F_i(p))G_i & Q_j & * & * & * & * \\
(A_i(p) + B_i(p)F_i(p))G_i & 0 & \nu Q_i & * & * & * \\
(A_i(p) + B_i(p)F_i(p))G_i & 0 & 0 & -\nu Q_j & * & * \\
R_z^{1/2} G_i & 0 & 0 & 0 & \gamma I & * \\
R_u^{1/2} F_i(p) G_i & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma I
\end{bmatrix} \geq 0 \tag{4.52}$$

Aplicando a metodologia de relaxação de Cuzzola *et al.* (2002) como descrito em (4.53).

$$(Q_i - G_i)^T Q_i^{-1} (Q_i - G_i) \Rightarrow G_i^T Q_i^{-1} G_i \geq G_i + G_i^T - Q_i \tag{4.53}$$

A partir de (4.53), a LMI (4.52) pode ser reescrita como em (4.54).

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - Q_i & * & * & * & * & * \\ (A_i(p) + B_i(p)F_i(p))G_i & Q_j & * & * & * & * \\ (A_i(p) + B_i(p)F_i(p))G_i & 0 & \nu Q_i & * & * & * \\ (A_i(p) + B_i(p)F_i(p))G_i & 0 & 0 & -\nu Q_j & * & * \\ R_z^{1/2}G_i & 0 & 0 & 0 & \gamma I & * \\ R_u^{1/2}F_i(p)G_i & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.54)$$

Fazendo  $U_i(p) = F_i(p)G_i$  e  $\mathcal{N}_i(p) = A_i(p)G_i + B_i(p)U_i(p)$  é definida (4.55), o que prova a LMI (4.38) do Teorema 6 para  $i = \sigma(k)$  e  $j = \sigma(k+1)$ .

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - Q_i & * & * & * & * & * \\ \mathcal{N}_i(p) & Q_j & * & * & * & * \\ \mathcal{N}_i(p) & 0 & \nu Q_i(p) & * & * & * \\ \mathcal{N}_i(p) & 0 & 0 & -\nu Q_j & * & * \\ R_z^{1/2}G_i & 0 & 0 & 0 & \gamma I & * \\ R_u^{1/2}U_i(p) & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.55)$$

Com o objetivo de determinar uma LMI para satisfazer a condição (4.25), baseado no observador de estados (4.9) e  $\hat{z}(k|k) = \hat{x}(k|k)$ , é possível descrever (4.56).

$$\hat{x}(k)^T R_z \hat{x}(k) + u(k)^T R_u \hat{x}(k) + \mathcal{F}_i^T(p) P_i \mathcal{F}_i(p) \leq \gamma \quad (4.56)$$

Em (4.56),  $\mathcal{F}_i(p) = A_i(p)\hat{x}(k) + B_i(p)u(k) + L_i(y(k) - C_i\hat{x}(k))$ . Fazendo  $P_i = \gamma Q_i^{-1}$  e realizando manipulações algébricas, como segue em (4.57).

$$1 - \mathcal{F}_i(p)^T Q_i^{-1} \mathcal{F}_i(p) - \hat{x}(k)^T R_z^{1/2} \gamma^{-1} R_z^{1/2} \hat{x}(k) - u(k)^T R_u^{1/2} \gamma^{-1} R_u^{1/2} u(k) \geq 0 \quad (4.57)$$

Aplicando o complemento de Schur a (4.57), segue (4.58).

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ \mathcal{F}_i(p) & Q_i & * & * \\ R_z^{1/2} \hat{x}(k) & 0 & \gamma I & * \\ R_u^{1/2} u(k) & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.58)$$

Por fim, para garantir a estabilidade robusta chaveada, é considerada inicialmente a restrição para estabilidade robusta comutada apresentada na Eq. (4.27). Dito isso, ao fazer  $P_i = \gamma Q_i^{-1}$  e multiplicar  $G_i^T$  à esquerda e  $G_i$  à direita, é formulado (4.59).

$$G_i^T \gamma Q_i^{-1} G_i - G_i^T \varepsilon G_i \geq 0 \quad (4.59)$$

Após aplicar o método de relaxação proposto por Cuzzola *et al.* (2002), a inequação (4.60) é obtida.

$$\gamma(G_i + G_i^T - Q_i) - G_i^T \varepsilon G_i \geq 0 \quad (4.60)$$

A expressão (4.60) pode ser reescrita como em (4.61).

$$(G_i + G_i^T - Q_i) - G_i^T \varepsilon^{1/2} \gamma^{-1} \varepsilon^{1/2} G_i > 0 \quad (4.61)$$

Em seguida, aplicando o complemento de Schur a (4.61), a LMI (4.62) é formulada.

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - Q_i & * \\ \varepsilon^{1/2} G_i & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.62)$$

Portanto, a demonstração do Teorema 6 está concluída. ■

É válido mencionar que a lei de controle  $u(k) = F_{\sigma(k)}(p(k))\hat{x}(k)$  garante a estabilidade do sistema da Eq. (4.8) sujeito a comutação resolvendo o processo de otimização descrito na Eq. (4.37). No entanto, não garante a robustez do sistema durante a ação de controle. Por esse motivo, foi adotada a metodologia de projeto proposta por Kothare *et al.* (1996).

Na metodologia de Kothare *et al.* (1996), a existência de elipsóides invariantes que limitam o comportamento dos estados no plano por eles composto garantem a robustez da ação de controle para todo o processo iterativo. Nesse sentido, para atingir a restrição de entrada (4.14) quando aplicada a um sistema SW-LPV-SS, é considerada a elipsoide invariante conforme o Lema 2.

**Lemma 2** (Switched asymptotically stable invariant ellipsoid). *Considere um sistema em malha fechada composto por uma planta LPV comutada descrita no espaço de estados como na Eq. (4.8) e um controlador de realimentação de estados como na Eq. (4.14), tal que a restrição (4.63) seja satisfeita,*

$$\begin{bmatrix} 1 & \hat{z}(k) \\ \hat{z}(k)^T & Q_{\sigma(k)} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.63)$$

*Então, a robustez é garantida se a resposta nunca sair da região elipsoidal no espaço de estados.*

**Prova do Lema 2 (Proposto).** Para garantir a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada em cada instante de amostragem, considere o problema de otimização (4.64) em que  $i = \sigma(k)$  denota o índice da regra de comutação.

$$\min_{P_i, \gamma} \gamma(k) \quad (4.64)$$

Sujeito a:

$$\hat{z}(k|k)^T P_i \hat{z}(k|k) < \gamma(k) \quad (4.65)$$

Na condição (4.65),  $i = \sigma(k)$ . Substituindo  $P_i = \gamma(k) Q_i^{-1}$  em (4.65) é obtido (4.66).

$$\hat{z}(k)^T \gamma(k) Q_i^{-1} \hat{z}(k|k) < \gamma(k) \quad (4.66)$$

A partir de (4.66), é obtido (4.67) por inspeção.

$$1 - \hat{z}(k)^T Q_i^{-1} \hat{z}(k|k) > 0 \quad (4.67)$$

Aplicando o complemento de Schur a (4.67), determina-se a LMI (4.68).

$$\begin{bmatrix} 1 & \hat{z}(k) \\ \hat{z}(k)^T & Q_i \end{bmatrix} > 0 \quad (4.68)$$

Portanto, a demonstração do Lemma 2 é concluída. ■

A obtenção das elipsóides de estabilidade é realizada ao considerar que o subconjunto  $\varepsilon = \{\hat{z} \in \mathbb{R}^{n_x} | \hat{z}^T G_{\sigma(k)}^{-1} \hat{z} < \gamma\}$  do espaço de estados  $\mathbb{R}^{n_x}$  é uma elipsóide invariante para os estados futuros previstos  $\hat{z}(k+1)$  do sistema comutado. Portanto, as elipsóides de estabilidade variam conforme a regra de comutação apresentada na Eq. (4.11), sendo influenciadas pela comutação entre os  $N$  Subsistemas disponíveis durante a ação de comutação.

Por fim, o projeto do controlador considera que os estados do sistema estão disponíveis para feedback. Contudo, nem todos os elementos são medidos. Por isso, é necessário obter a parte restante para ser usada na lei de controle. Logo, é preciso utilizar um observador de estados para um sistema com realimentação de saída descrito por  $\hat{x}(k+1) = A_{\sigma(k)}(p(k))\hat{x}(k) + B_{\sigma(k)}(p(k))u(k) + L_{\sigma(k)}(y(k) - C_{\sigma(k)}\hat{x}(k))$ . Então, para utilizar o estimador comutado, é calculado o ganho do observador comutado  $L_{\sigma(k)}$ , o que é discutido na Subseção 4.3.1.

### 4.3.1 Projeto de observador de estados comutado com matriz de ponderação

Tomando como base a metodologia de projeto de observadores robustos offline proposta por Park *et al.* (2011), com o objetivo de projetar o observador de estado robusto a partir de LMIs aplicadas ao sistema comutado da Eq. (4.8), é proposto o Teorema 7.

**Teorema 7** (Observador de estados comutado). *Considere que o sistema da Eq. (4.8) seja plenamente observável, sujeito a taxa de decaimento do erro de estimação  $\rho$  definido na faixa de valores  $0 < \rho < 1$ . Se existirem matrizes  $Z_{\sigma(k)} = Z_{\sigma(k)}^T \geq 0$  e  $H_{\sigma(k)} \geq 0$  tal que a restrição (4.69) seja satisfeita.*

$$\begin{bmatrix} \rho^2 Z_{\sigma(k)} - L_e & * \\ Z_{\sigma(k)} A_{\sigma(k)}(p(k)) - H_{\sigma(k)} C_{\sigma(k)} & Z_{\sigma(k)} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.69)$$

Na restrição (4.69),  $L_e > 0$  é a matriz de ponderação. Então, os ganhos do observador  $L_{\sigma(k)} \in \{L_1, \dots, L_N\}$ , em que  $N$  é o número de Subsistemas, são obtidos por  $L_{\sigma(k)} = H_{\sigma(k)} Z_{\sigma(k)}^{-1}$ .

**Prova do Teorema 7 (Proposto).** A interação entre os sistemas real e estimado, sob a regra de comutação (4.11), determina a equação do erro dinâmico (4.70).

$$e(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) \quad (4.70)$$

Eq. (4.70) é minimizada conforme o modelo estimado se aproxima da dinâmica do modelo real. Além disso, a eq. Eq. (4.70) pode ser rescrita como em Eq. (4.71).

$$e(k+1) = (A_i(p) - L_i C_i) e(k) \quad (4.71)$$

Assim como em Park *et al.* (2011) e Rego e Costa (2023), este trabalho considera uma função quadrática do erro, que está descrita em (4.72) para sistemas sujeitos a comutação.

$$E(e(k)) = e(k)^T Z_i e(k), \quad Z_i > 0 \quad (4.72)$$

Aplicando a condição de estabilidade quadrática (4.73).

$$E(e(k+1)) - \rho^2 E(e(k)) < -e(k)^T L_e e(k) \quad (4.73)$$

A expressão (4.73) é equivalente a (4.74).

$$\rho^2 Z_i - L_e - (A_i(p) - L_i C_i)^T Z_i (A_i(p) - L_i C_i) > 0 \quad (4.74)$$

A desigualdade (4.74) pode ser reescrita como (4.75).

$$\rho^2 Z_i - L_e - (Z_i A_i(p) - Z_i L_i C_i)^T Z_i^{-1} (Z_i A_i(p) - Z_i L_i C_i) > 0 \quad (4.75)$$

Fazendo  $H_i = Z_i L_i$  em (4.75) a desigualdade (4.76) é formulada.

$$\rho^2 Z_i - L_e - (Z_i A_i(p) - H_i C_i)^T Z_i^{-1} (Z_i A_i(p) - H_i C_i) > 0 \quad (4.76)$$

Aplicando o complemento de Shur em (4.76) é definida a LMI (4.77).

$$\begin{bmatrix} \rho^2 Z_i - L_e & * \\ Z_i A_i(p) - H_i C_i & Z_i \end{bmatrix} > 0 \quad (4.77)$$

Portanto, é possível determinar  $L_i$ , em que  $L_i = H_i Z_i^{-1}$ , se existirem as matrizes  $Z_i = Z_i^T \geq 0$  e  $H_i \geq 0$  tal que a LMI (4.77) seja satisfeita. ■

Além disso, um  $F_{\sigma(k)}(p(k))$  específico é calculado no tempo  $k$  a partir da tabela de pesquisa de acordo com o estado estimado  $\hat{x}(k)$ . Em seguida, similarmente ao que foi efetuado por Wan e Kothare (2002), por simplicidade, assume-se que  $F_{\sigma(k)}(p(k))$  é independente de  $\hat{x}(k)$ .

#### 4.3.2 Critério de estabilidade robusta para sistemas comutados

Inspirado pela metodologia de Wan e Kothare (2002), este trabalho propõe um critério para garantir a estabilidade em malha fechada por realimentação de saída baseada em observadores proposta para sistemas LPV sujeito a comutação como descrito na Eq. (4.8). Nessa perspectiva, considere a matriz de estados do modelo aumentado que descreve a dinâmica entre os sistemas real e estimado, definida na Eq. (4.78).

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix} = \mathcal{A}_{\sigma(k)}(p(k)) \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

No sistema (4.78), a matriz  $\mathcal{A}_{\sigma(k)}(p(k))$  é dada pela Eq. (4.79).

$$\mathcal{A}_{\sigma(k)}(p(k)) = \begin{bmatrix} A_{\sigma(k)}(p(k)) & B_{\sigma(k)}(p(k))F_{\sigma(k)}(p(k)) \\ L_{\sigma(k)}C_{\sigma(k)} & A_{\sigma(k)}(p(k)) + B_{\sigma(k)}(p(k))F_{\sigma(k)}(p(k)) - L_{\sigma(k)}C_{\sigma(k)} \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

Desse modo, é proposto o critério de estabilidade robusta para sistemas LPV sujeitos a regra de comutação da Eq. (4.11) utilizando a estrutura definida na Eq. (4.78), apresentado no Teorema 8.

**Teorema 8** (Critério de estabilidade robusta). *O conjunto observador-controlador, sujeito à regra de comutação (4.11), será globalmente assintoticamente estável se existirem os ganhos de realimentação de estado  $F_{\sigma(k)}(p(k))$  e matrizes  $\mathcal{Q}_{\sigma(k)} = \mathcal{Q}_{\sigma(k)}^T \geq 0$  e  $\mathcal{G}_{\sigma(k)} \geq 0$  de ordem apropriada, tal que a LMI (4.80) seja factível.*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{G}_{\sigma(k)} + \mathcal{G}_{\sigma(k)}^T - \mathcal{Q}_{\sigma(k)} & * \\ \mathcal{A}_{\sigma(k)}(p(k))\mathcal{G}_{\sigma(k)} & \mathcal{Q}_{\sigma(k)} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.80)$$

Na LMI (4.80), a matriz  $\mathcal{A}_{\sigma(k)}(p(k))$  é apresentada na Eq. (4.79).

**Prova do Teorema 8 (Proposto).** Submetendo o modelo aumentado da Eq (4.78) ao critério de estabilidade de Lyapunov dado na Eq. (4.10), pode-se formular

$$\mathcal{P}_i - \mathcal{A}_i^T(p) \mathcal{P}_i \mathcal{A}_i(p) \geq 0 \quad (4.81)$$

Em (4.81),  $i = \sigma(k)$ ,  $\mathcal{A}_{\sigma(k)}$  são as matrizes de estado e  $\mathcal{P}_{\sigma(k)}$  são as matrizes de estabilidade do modelo aumentado. Substituindo  $\mathcal{P}_i = \mathcal{Q}_i^{-1}$  e multiplicando a esquerda da Eq (4.81) por  $\mathcal{G}_i^T$  e a direita por  $\mathcal{G}_i$ , é possível reescrever a desigualdade (4.81) como (4.82).

$$\mathcal{G}_i^T \mathcal{Q}_i^{-1} \mathcal{G}_i - [\mathcal{A}_i(p)\mathcal{G}_i]^T \mathcal{Q}_i^{-1} [\mathcal{A}_i(p)\mathcal{G}_i] \geq 0 \quad (4.82)$$

Aplicando o procedimento de relaxação proposto por Cuzzola *et al.* (2002) na desigualdade (4.82) é obtida a desigualdade (4.83)

$$\mathcal{G}_i^T + \mathcal{G}_i - \mathcal{Q}_i + [\mathcal{A}_i(p)\mathcal{G}_i]^T \mathcal{Q}_i^{-1} [\mathcal{A}_i(p)\mathcal{G}_i] \geq 0 \quad (4.83)$$

Por fim, aplicando o complemento de Schur na desigualdade (4.83) é formulada a LMI (4.84).

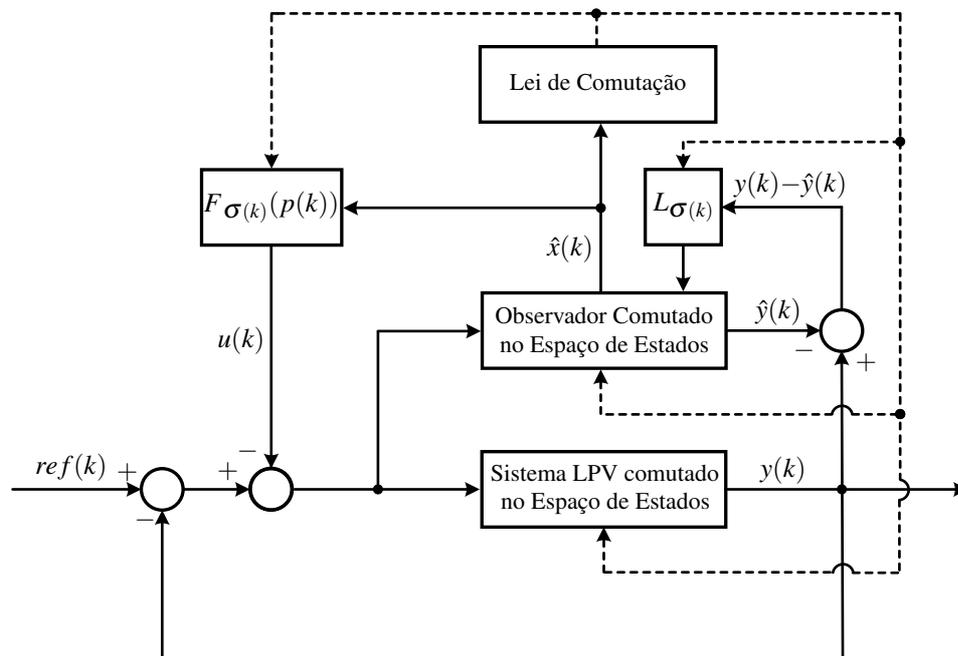
$$\begin{bmatrix} \mathcal{G}_i + \mathcal{G}_i^T - \mathcal{Q}_i & * \\ \mathcal{A}_i(p)\mathcal{G}_i & \mathcal{Q}_i \end{bmatrix} > 0 \quad (4.84)$$

Assim, o conjunto observador-controlador é globalmente assintoticamente estável se existir um conjunto de ganho de realimentação  $F_i(p)$  e um conjunto de ganhos do estimador de estados  $L_i$ , bem como as matrizes  $\mathcal{G}_i$  e  $\mathcal{Q}_i$ , em que  $i = \sigma(k) \in \{1, 2, \dots, N\}$  para os  $N$  subsistemas disponíveis para comutação, de modo que a LMI (4.80) seja factível. ■

#### 4.4 Diagrama de controle para o SOF-RMPC-LPV

A Figura 5 apresenta o diagrama de controle com estimador de estados comutado. Neste diagrama, o sistema LPV comutado no Espaço de Estados é dado pelas matrizes  $A_{\sigma(k)}(p(k))$ ,  $B_{\sigma(k)}(p(k))$ ,  $C_{\sigma(k)}$  e  $D_{\sigma(k)}$ , em que  $p(k)$  é o parâmetro LPV e  $\sigma(k)$  é a regra de comutação. Ademais, os ganhos de realimentação  $F_{\sigma(k)}(p(k))$  e os ganhos do observador de estados  $L_{\sigma(k)}$  também são comutados conforme a regra de comutação.

Figura 5 – Diagrama de controle para o SOF-RMPC-LPV.



Além disso, como pode ser verificado no diagrama da Figura 5 a lei de comutação utiliza o sinal dos estados estimados que é obtido por meio do observador de estados. Desse modo, a metodologia proposta nesta dissertação possibilita o controle e a comutação do sistema mesmo quando não é possível medir os estados do sistema, uma vez que a lei de controle e a lei de comutação utilizam os estados estimados.

Por fim, para obter os ganhos de realimentação  $F_{\sigma(k)}(p(k))$  para a lei de controle, bem como as matrizes de estabilidade  $P_{\sigma(k)}$  para a lei de comutação, é utilizado o Teorema 6. No caso dos ganhos do observador de estados  $L_{\sigma(k)}$ , é utilizado o Teorema 7. É válido mencionar que o diagrama da Figura 5 está sujeito a uma eventual saturação do sinal de controle, fenômeno conhecido como *windup*. Para contornar essa problemática, os Capítulos 5 e 6 propõem um *Anti-Windup* comutado.

## 5 COMPENSADOR ANTI-WINDUP COMUTADO

Este capítulo aborda a formulação do compensador *Anti-Windup* comutado (em inglês, *switched Anti-Windup* - SW-AW). Inicialmente, é proposto o Teorema 9 para obter os ganhos do compensador *Anti-Windup* comutado em termo de LMI (subseção 5.1). Então, é proposto o diagrama de controle para lidar com o problema de saturação do controlador na prática (subseção 5.2), fazendo uso da síntese do compensador formulado na subseção 5.1.

### 5.1 Síntese de compensador *Anti-Windup* comutado via LMIs

Segundo Rego e Costa (2023), o fenômeno conhecido como *windup* ocorre quando, na prática, o sinal de controle assume um valor diferente daquele que realmente atua sobre a planta. Em outras palavras, o sinal de controle entra na região de saturação, o que é indesejado, pois resulta em uma degradação do desempenho do sistema. Para lidar com essa situação, existem técnicas conhecidas como *Anti-Windup* (AW).

Então, considere o sistema LPV comutado com sinal de controle limitado por saturação definido em (5.1).

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{\sigma(k)}(p(k))x(k) + B_{\sigma(k)}(p(k))\text{sat}(u(k)) \\ y(k) &= C_{\sigma(k)}x(k) + D_{\sigma(k)}\text{sat}(u(k)) \end{aligned} \quad (5.1)$$

No sistema (5.1),  $\text{sat}(u(k)) = u_m$  representa o sinal de controle limitado pela restrição de saturação, garantindo que  $u(k) \in [u_{\min}, u_{\max}]$ . Segundo Turner *et al.* (2003), o sinal de controle também pode ser representado como na Eq. (5.2).

$$\text{sat}(u(k)) = u(k) - Dz(u(k)) \Rightarrow Dz(u(k)) = u(k) - \text{sat}(u(k)) \quad (5.2)$$

Por inspeção, o sinal limitado por saturação é dado pela diferença entre o sinal de controle e a zona morta ( $Dz$ ). Na literatura, há diversos trabalhos que abordam o compensador *Anti-Windup*. Devido a praticidade de implementação, destaca-se o artigo de Turner *et al.* (2003), que propõe um atuador AW com otimização via LMIs para lidar com o problema de saturação do controlador.

Com o objetivo de implementar um compensador *Anti-Windup* comutado, o Teorema 9 estabelece um problema de otimização via LMI para encontrar o ganho  $K_{\sigma(k)}$  utilizado nesse compensador tomando como base Turner *et al.* (2003). Além disso, é válido informar que o Teorema 9 leva em consideração a relaxação em LMI de Cuzzola *et al.* (2002), analogamente ao que foi realizado em Rego e Costa (2023).

**Teorema 9** (*Anti-Windup* para sistemas LPV comutados). *Se existirem matrizes  $S_{\sigma(k)} > 0$ ,  $X_{\sigma(k)} \neq X_{\sigma(k)}^T$ ,  $J_{\sigma(k)} = J_{\sigma(k)}^T > 0$ ,  $R_{\sigma(k)} \in \mathbb{R}^{(m+q) \times m}$  sujeitas à regra de comutação (4.6) ou (4.11) e um escalar  $\lambda$ , tal que a LMI (5.3) seja satisfeita.*

$$\begin{bmatrix} -(X_{\sigma(k)} + X_{\sigma(k)}^T - S_{\sigma(k)}) & * & * & * & * \\ -R_{\sigma(k)} & -2J_{\sigma(k)} & * & * & * \\ 0 & I & -\lambda I & * & * \\ C_{\sigma(k)}X_{\sigma(k)} + R_{\sigma(k)}D_{\sigma(k)} & J_{\sigma(k)}D_{\sigma(k)} & 0 & -I & * \\ A_{\sigma(k)}(p(k))X_{\sigma(k)} + R_{\sigma(k)}B_{\sigma(k)}(p(k)) & J_{\sigma(k)}B_{\sigma(k)} & 0 & 0 & -S_{\sigma(k)} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.3)$$

Então, o ganho de compensação do *Anti-Windup* é dado por  $K_{\sigma(k)} = R_{\sigma(k)}X_{\sigma(k)}^{-1}$ .

**Prova do Teorema 9 (Proposto).** Para obter a LMI referente à obtenção do ganho do compensador *Anti-Windup* para sistemas LPV sujeitos à comutação, é adotada a função de Lyapunov da Eq. (4.10) e a condição de estabilidade da Eq. (5.4), inicialmente formulada por Turner *et al.* (2003).

$$\Delta V(\hat{x}(k)) + 2\tilde{u}(k)^T W_{\sigma(k)}[u_{in}(k) - u_d(k) - \tilde{u}(k)] < 0 \quad (5.4)$$

Em seguida, fazendo  $\sigma(k) = i \in \{1, 2, \dots, N\}$  para os  $N$  subsistemas do sistema global e  $\Xi = [x(k) \ \tilde{u}(k) \ u_{in}(k)]$ , é possível escrever a expressão (5.4) em uma forma quadrática equivalente como em (5.5).

$$\Xi^T \begin{bmatrix} \Phi_{11} & * & * \\ \Phi_{12}^T & D_i^T D_i + B_i^T(p)P_i B_i(p) - 2W_i & * \\ 0 & W_i & -\lambda^2 I \end{bmatrix} \Xi < 0 \quad (5.5)$$

Em (5.5),  $\Phi_{11} = \bar{A}_i(p)^T P_i \bar{A}_i(p) - P_i + \bar{C}_i^T \bar{C}_i$  e  $\Phi_{12} = \bar{A}_i(p)^T P_i B_i(p) - K_i^T W_i + \bar{C}_i^T D_i$ , em que  $\bar{A}_i(p) = A_i(p) + B_i(p)K_i$  e  $\bar{C}_i = C_i + D_i K_i$  e  $W_i = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ . Aplicando duas vezes o complemento de Schur a (5.5), é obtido (5.6).

$$\begin{bmatrix} -P_i & * & * & * & * \\ -K_i W_i & -2W_i & * & * & * \\ 0 & W_i & -\lambda I & * & * \\ C_i + K_i D_i & D_i & 0 & -\lambda I & * \\ A_i(p) + K_i B_i(p) & B_i(p) & 0 & 0 & -P_i^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.6)$$

Aplicando uma transformação de congruência a (5.6) utilizando  $\text{diag}(P_i^{-1}, W_i^{-1}, I, I, I)$ , é obtido (5.7).

$$\begin{bmatrix} -P_i^{-1} & * & * & * & * \\ -K_i P_i^{-1} & -2W_i^{-1} & * & * & * \\ 0 & I & -\lambda I & * & * \\ (C_i + K_i D_i) P_i^{-1} & W_i^{-1} D_i & 0 & -\lambda I & * \\ (A_i(p) + K_i B_i(p)) P_i^{-1} & W_i^{-1} B_i(p) & 0 & 0 & -P_i^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.7)$$

Substituindo  $S_i = P_i^{-1}$  e  $J_i = W_i^{-1}$  e em seguida multiplicando à esquerda da matriz (5.7) por  $\text{diag}(X_i^T S_i^{-1}, I, I, I, I)$  e à direita por  $\text{diag}(S_i^{-1} X_i, I, I, I, I)$  é obtido (5.8).

$$\begin{bmatrix} -X_i^T S_i^{-1} X_i & * & * & * & * \\ -K_i X_i & -2J_i & * & * & * \\ 0 & I & -\lambda I & 0 & * \\ (C_i + K_i D_i) X_i & J_i D_i & 0 & -\lambda I & * \\ (A_i(p) + K_i B_i(p)) X_i & J_i B_i(p) & 0 & 0 & -S_i \end{bmatrix} < 0 \quad (5.8)$$

Aplicando o procedimento de relaxação como realizado por Rego e Costa (2023) e apresentado na (5.9).

$$-(S_i - X_i)^T S_i^{-1} (S_i - X_i) \Rightarrow -X_i^T S_i^{-1} X_i \geq -(X_i + X_i^T - S_i) \quad (5.9)$$

A partir de (5.9) e substituindo  $R_i = K_i X_i$ , a LMI (5.8) pode ser reescrita em (5.10).

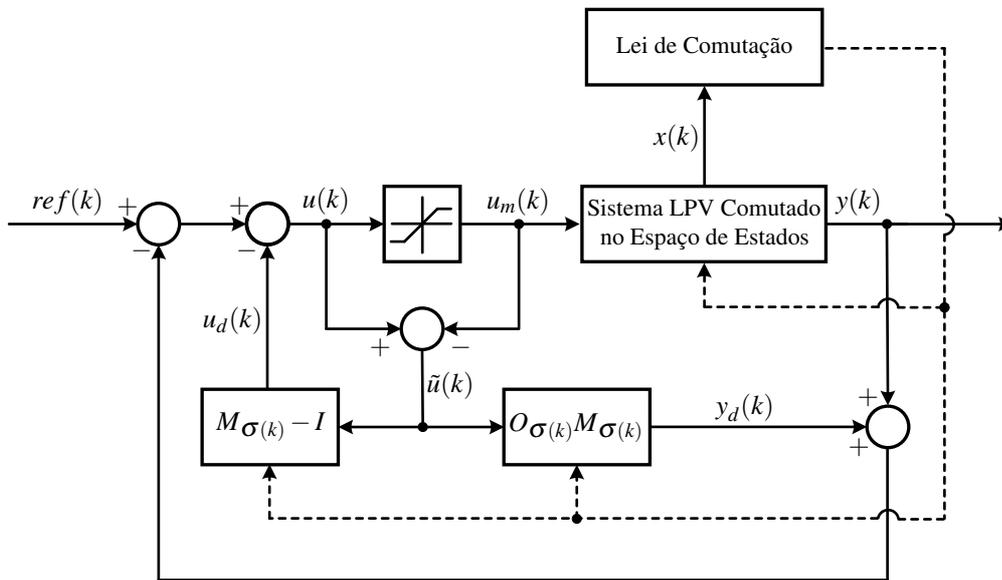
$$\begin{bmatrix} -(X_i + X_i^T - S_i) & * & * & * & * \\ -R_i & -2J_i & * & * & * \\ 0 & I & -\lambda I & * & * \\ C_i X_i + R_i D_i & J_i D_i & 0 & -\lambda I & * \\ A_i(p) X_i + R_i B_i(p) & J_i B_i(p) & 0 & 0 & -S_i \end{bmatrix} < 0 \quad (5.10)$$

Portanto, da LMI (5.10), o ganho de compensação do SW-AW é dado por  $K_i = R_i X_i^{-1}$  com  $i = \sigma(k)$ . ■

## 5.2 Diagrama de controle para o SW-AW via realimentação de estados

No trabalho de Skogestad e Postlethwaite (2005) é formulado um atuador que considera a existência de um controlador de ordem plena projetado para solucionar o problema de *windup*, no qual foi utilizado o conceito da fatoração por matriz co-primas. Nesta dissertação, esse conceito é aplicado a sistemas comutados. Nesse sentido, as matrizes coprimas são comutadas por uma lei de comutação são definidas, conforme ilustrado na Figura 6.

Figura 6 – Diagrama de controle para o SW-AW com lei de comutação.



Desse modo, ao analisar a Figura 6, tem-se o equacionamento (5.11)

$$\begin{cases} x_d(k+1) = (A_{\sigma(k)}(p(k)) + B_{\sigma(k)}(p(k))K_{\sigma(k)})x_d(k) + B_{\sigma(k)}(p(k))\tilde{u}(k) \\ y_d(k) = (C_{\sigma(k)} + D_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)})x_d(k) + D_{\sigma(k)}\tilde{u}(k) \\ u_d(k) = K_{\sigma(k)}x_d(k) \\ \tilde{u}(k) = Dz(\text{sat}(u(k)) - u(k)) \end{cases} \quad (5.11)$$

No equacionamento (5.11),  $K_{\sigma(k)}$  é o ganho do atuador SW-AW e  $\tilde{u} = Dz(u_m - u(k))$ , em que  $Dz$  se refere à zona morta analogamente ao foi realizado por Turner *et al.* (2003) e Skogestad e Postlethwaite (2005).

$$\begin{bmatrix} M_{\sigma(k)} - I \\ O_{\sigma(k)}M_{\sigma(k)} \end{bmatrix} \sim \left[ \begin{array}{c|c} A_{\sigma(k)}(p(k)) + B_{\sigma(k)}(p(k))K_{\sigma(k)} & B_{\sigma(k)}(p(k)) \\ \hline K_{\sigma(k)} & 0 \\ \hline C_{\sigma(k)} + D_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)} & D_{\sigma(k)} \end{array} \right] \quad (5.12)$$

Em (5.12),  $K_{\sigma(k)}$  é o ganho SW-AW,  $M_{\sigma(k)}$  e  $O_{\sigma(k)}$  são as matrizes co-prias,  $A_{\sigma(k)}(p(k))$  e  $B_{\sigma(k)}(p(k))$  são LPVs. Por conseguinte, podem ser calculadas as funções de transferência  $M_{\sigma(k)}$  e  $O_{\sigma(k)}$ , em que  $O_{\sigma(k)} = \text{ss}(A_{\sigma(k)}(p(k)), B_{\sigma(k)}(p(k)), C_{\sigma(k)}, D_{\sigma(k)})$ . Ademais, os polos do filtro condicionador  $M_{\sigma(k)}$  são iguais aos autovalores de  $A_{\sigma(k)}(p(k)) + B_{\sigma(k)}(p(k))K_{\sigma(k)}$ .

$$\Theta = \begin{bmatrix} M_{\sigma(k)} - I \\ O_{\sigma(k)}M_{\sigma(k)} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Logo, o cálculo de  $M_{\sigma(k)}$  é realizado encontrando uma matriz adequada  $K_{\sigma(k)}$  que atenda a requisitos pré-especificados de estabilidade e desempenho. Uma vez que  $M_{\sigma(k)} - I$  é sempre estritamente adequada, não existe uma passagem direta de  $\tilde{u}(k)$  para  $u_d(k)$ , portanto o sistema está bem condicionado (TURNER *et al.*, 2003; JUNGERS; PERES, 2011). Nesse sentido, o compensador discreto SW-AW é definido pela Eq. (5.13).

## 6 PROJETO DE SOF-RMPC-LPV COM SW-AW

Neste capítulo, é apresentado, inicialmente, o algoritmo *offline* para o SOF-RMPC-LPV com SW-AW (subsecção 6.1). Em seguida, é apresentado o diagrama de controle para o SOF-RMPC-LPV (subsecção 6.2). Desse modo, o modelo *offline* simplifica a lei de controle, permitindo que a *Look-Up table* seja inserida em um microcontrolador para aplicações práticas como abordado em Costa *et al.* (2017).

### 6.1 Algoritmo *offline* para o SOF-RMPC-LPV com SW-AW

Considerando os conceitos introduzidos nas seções anteriores, o procedimento *offline* para o sistema SW-LPV-SS via realimentação de saída é descrito no algoritmo detalhado a seguir. A disposição *offline* envolve a obtenção da lei de controle por meio de uma *Look-Up table*, baseada nas elipsóides de estabilidade inicialmente propostas por Kothare *et al.* (1996).

---

#### Algoritmo 1: SOF-RMPC *offline* com SW-AW

---

Para implementar o atuador Anti-Windup comutado, segue-se o seguinte procedimento: é gerada uma sequência de minimizadores:  $\lambda_k, S_{ik}, X_{ik}, R_{ik}$  e  $J_{ik}$  com base em (5.3). Tome  $k := 1$  e, em seguida, siga os passos

- 1 Calcule os minimizadores  $\lambda_k, S_{ik}, X_{ik}, R_{ik}$  e  $J_{ik}$ ;
- 2 Calcule o ganho Anti-Windup  $K_{ik} = R_{ik}X_{ik}^{-1}$  para  $i = 1, 2, \dots, N$  subsistemas.

Posteriormente, para implementar o algoritmo para o controlador SW-RMPC, segue-se o seguinte procedimento: para um sistema offline, dada uma condição inicial factível  $\hat{x}_{set}$ , é gerada a seguinte sequência de minimizadores  $\gamma_k, Q_{ik}, G_{ik}, U_{ik}$  para  $k = 1, 2, \dots, N_s$  e  $i = 1, 2, \dots, N$  seguindo (4.10)–(4.12) e (4.37)–(4.63). Tome  $k := 1$  e siga os passos.

- 1 Calcule os minimizadores  $\gamma_k, Q_{ik}, G_{ik}, U_{ik}$  com a restrição adicional  $G_{k-1} > G_k$  e armazene  $G_{ik}, U_{ik}$  e  $F_{ik}$  em *Look-up table*.
  - 2 Enquanto  $k \leq N_s$ , verifique se os estados estimados  $\hat{x}_{k+1}$  satisfazem a condição
 
$$\|\hat{x}_{k+1}\|_{G_{\sigma}^{-1}}^2 \leq 1.$$
    - i Se satisfizerem, pare o processo iterativo;
    - ii Se não satisfizerem, faça  $k := k + 1$  e volte ao Passo 1.
  - 3 Se  $k \geq N_s$ , aplique a lei de controle (6.2).
-

Conforme afirmado por Kothare *et al.* (1996), a elipsoide de estabilidade invariante pode ser interpretada como uma resposta estável BIBO que se mantém dentro dos limites da elipsoide e converge para zero no estado estacionário, considerando a Resposta ao Impulso Finito (FIR) para uma condição inicial específica. Além disso, se os estados estiverem contidos dentro de uma elipsoide, o problema de otimização (4.37)-(4.63) define uma lei de controle que assegura que os estados futuros também permanecerão dentro de uma elipsoide, com uma proporção reduzida.

## 6.2 Diagrama de Controle para o SOF-RMPC-LPV com SW-AW

A estrutura de controle RMPC com o AW para sistemas comutados proposta para sistemas LPV com controladores na região de saturação é baseada na metodologia de controle implementada por Rego e Costa (2023), na qual não leva em consideração a ação de comutação. Dito isso, o diagrama proposto é apresentado na Figura 7, no qual a linha tracejada indica o envio do sinal de comutação para os blocos do diagrama. Ademais,  $F_{\sigma(k)}(p(k))$  é o ganho de realimentação de saída,  $L_{\sigma(k)}$  é o ganho do observador,  $M_{\sigma(k)}$  é o filtro de condicionamento AW e  $y(k)$  é a saída do sistema dada pela Eq. (6.1).

$$y(k) = y_{lin}(k) - y_d(k) \quad (6.1)$$

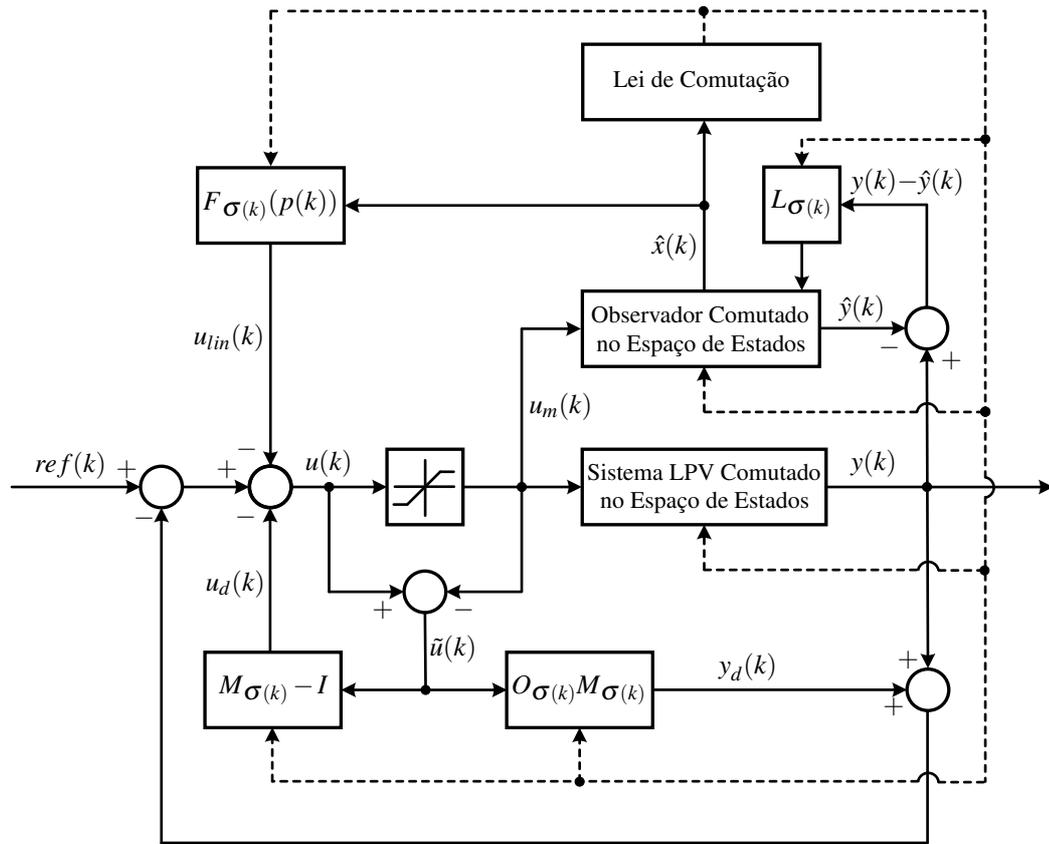
Na Eq. (6.1),  $y_d$  é uma medida direta do desvio do sistema saturado em relação ao desempenho linear nominal em resposta a  $u_{lin}$ . Neste trabalho, é adotada uma metodologia de filtro de condicionamento comutado, expresso por  $M_{\sigma(k)}$ . Desse modo, é obtida uma matriz co-prima para cada um dos  $N$  subsistemas que formam o sistema global da Eq. (4.8), que são selecionadas conforme a regra de comutação da Eq. (4.11), analogamente ao que foi apresentado no diagrama da Figura 6. Logo, as matrizes co-primas podem ser definidas conforme apresentado na Eq. (5.12) anteriormente.

Dessa forma, ao analisar o diagrama de controle da Figura 7, o atuador AW comutado proposto pode ser equacionado como na Eq. (5.11). No caso nominal, tem-se  $u(k) = u_m(k)$ . Quando os eventos de saturação terminam, a saída da zona morta  $\tilde{u}(k)$  torna-se nula. Na Figura 1, os sinais gerados pela compensação AW são introduzidos na saída e na entrada do controlador. O sinal de controle  $u(k)$  com o SW-AW é definido por (6.2).

$$u(k) = e(k) - F_{\sigma(k)}(p(k))\hat{x}(k) - u_d(k) \quad (6.2)$$

Na Eq. (6.2),  $e(k) = r(k) - y_{lin}(k)$ .

Figura 7 – Diagrama de controle para o SOF-RMPC-LPV com SW-AW.



Portanto, o mecanismo da metodologia proposta do SOF-RMPC com compensador SW-AW foi desenvolvido conforme as seguintes etapas:

(i) uma regra de comutação foi definida unindo conceitos de Geromel e Colaneri (2006) e Park *et al.* (2011) para atuar os Subistemas via realimentação de saída;

(ii) o observador de estados comutado foi proposto com base em Park *et al.* (2011) com um novo critério de estabilidade para o conjunto controlador-observador do sistema SW-LPV-SS aumentado fundamentado de Wan e Kothare (2003);

(iii) o procedimento de resolução *offline* foi proposto para obter a ação de controle com ganhos de realimentação de saída comutados por meio da *Look-Up table*;

(iv) um diagrama de controle com observador de estados e compensador *Anti-Windup* comutado aprimorado de Rego e Costa (2023) foi desenvolvido para lidar com a região de saturação do controlador.

## 7 EXEMPLO NUMÉRICO

Este capítulo apresenta e discute os resultados provenientes das simulações. A princípio, são apresentadas as simulações referentes à aplicação do SOF-RMPC com SW-AW em um exemplo numérico LPV no espaço de estados (seção 7.1). Em seguida, são apresentados os resultados das simulações da aplicação da metodologia proposta ao conversor *boost* CCTE (seção 8.3). Previamente, são discutidas as estratégias propostas para efetuar o controle de cada sistema adotado.

### 7.1 Descrição do modelo

Considere o exemplo numérico em (7.1).

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\alpha(k))x(k) + B(\beta(k))u(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (7.1)$$

No sistema (7.1), as matrizes  $A(\alpha(k))$  e  $B(\beta(k))$  são definidas por (7.2)-(7.3).

$$A(\alpha(k)) = \begin{bmatrix} 0,872 & -0,0623\alpha(k) \\ 0,0935 & 0,997 \end{bmatrix}, \quad B(\beta(k)) = \begin{bmatrix} 0,0935\beta(k) \\ 0,00478\beta(k) \end{bmatrix}, \quad (7.2)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0,333 & -1 \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

Os parâmetros variam aleatoriamente dentro dos intervalos  $\alpha(k) \in [1 \ \delta]$  and  $\beta(k) \in [0, 1 \ 1]$ . Para implementar a abordagem de controle proposta, este sistema LPV é modelado usando a metodologia LPV chaveado. Dessa forma, fazendo  $\delta = 5$  e sabendo que as matrizes de estado dependem dos parâmetros  $\alpha(k)$  e  $\beta(k)$ , são definidos os conjuntos  $\alpha(k) = \{\alpha_1(k), \alpha_2(k)\}$  e  $\beta(k) = \{\beta_1(k), \beta_2(k)\}$ , em que  $\alpha_1(k) \in [1 \ 3]$ ,  $\alpha_2(k) \in [3 \ 5]$ ,  $\beta_1(k) \in [0, 1 \ 0,55]$  e  $\beta_2(k) \in [0,55 \ 1]$ , que variam aleatoriamente dentro da sub-região especificada.

A partir dessas considerações, é modelado o subsistema 1, que é representado pelo o conjunto de matrizes  $(A_1(\alpha_1(k)), B_1(\beta_1(k)), C_1, D_1)$  definido nas Eqs. (7.4)-(7.5) e o subsistema 2, dado pelo o conjunto de matrizes  $(A_2(\alpha_2(k)), B_2(\beta_2(k)), C_2, D_2)$  definido nas Eqs. (7.6)-(7.7).

$$A_1(\alpha_1(k)) = \begin{bmatrix} 0,872 & -0,0623\alpha_1(k) \\ 0,0935 & 0,997 \end{bmatrix}, \quad B_1(\beta_1(k)) = \begin{bmatrix} 0,0935\beta_1(k) \\ 0,00478\beta_1(k) \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0,333 & -1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = 0 \quad (7.5)$$

$$A_2(\alpha_2(k)) = \begin{bmatrix} 0,872 & -0,0623\alpha_2(k) \\ 0,0935 & 0,997 \end{bmatrix}, \quad B_2(\beta_2(k)) = \begin{bmatrix} 0,0935\beta_2(k) \\ 0,00478\beta_2(k) \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0,333 & -1 \end{bmatrix}, \quad D_2 = 0 \quad (7.7)$$

### 7.1.1 Estratégia de controle para o exemplo numérico

Para esse caso com dois subsistemas, ou seja,  $N = 2$ , a regra de comutação apresentada na Eq. (4.10) pode ser escrita como na Eq. (7.8).

$$\sigma(\hat{x}(k)) = \min_{V_1, V_2} (V_1(\hat{x}(k)), V_2(\hat{x}(k))) \quad (7.8)$$

Na Eq. (7.8), as funções de Lyapunov  $V_1(\hat{x}(k))$  e  $V_2(\hat{x}(k))$ , são definidas nas Eqs. (7.9) e (7.10), respectivamente.

$$V_1(\hat{x}(k)) = \hat{x}(k)^T P_1 \hat{x}(k) \quad (7.9)$$

$$V_2(\hat{x}(k)) = \hat{x}(k)^T P_2 \hat{x}(k) \quad (7.10)$$

Na Eq. (7.9), as matrizes  $P_1$  e  $P_2$  representam as condições de estabilidade de Lyapunov para os subsistemas 1 e 2, respectivamente, que são obtidas utilizando o Teorema 6. Assim, a estabilização do sistema global, definido na Eq. (4.8), é alcançada através da lógica de chaveamento descrita a seguir para cada instante de tempo  $k$ .

SE  $\sigma(\hat{x}(k)) = V_1(\hat{x}(k))$ , ENTÃO

$$\text{Subsistema 1 : } \begin{cases} x(k+1) & = A_1(\alpha_1(k))x(k) + B_1(\beta_1(k))u(k) \\ y(k) & = C_1x(k) \end{cases} \quad (7.11)$$

SE  $\sigma(\hat{x}(k)) = V_2(\hat{x}(k))$ , ENTÃO

$$\text{Subsistema 2 : } \begin{cases} x(k+1) & = A_2(\alpha_2(k))x(k) + B_2(\beta_2(k))u(k) \\ y(k) & = C_2x(k) \end{cases} \quad (7.12)$$

Para lidar com a saturação no sinal de controle, é adotado o controlador  $u(k)$  com o compensador Anti-Windup comutado que foi descrito na Eq. (6.2). Além disso, como nem todos os elementos dos estados do sistema são medidos, adota-se o observador de estados comutado definido na Eq. (4.9). É válido informar que tanto o compensador Anti-Windup como o observador de estados estão sujeitos a lógica de comutação descrita anteriormente.

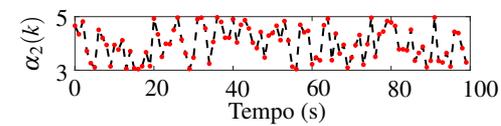
### 7.1.2 Simulações do exemplo numérico

Com o objetivo de verificar a eficácia dos teoremas propostos, é aplicado ao exemplo numérico tanto o procedimento de otimização *offline*, como o *online*. Para o caso *offline*, utiliza-se como *benchmark* o artigo de Rego e Costa (2023) e para o caso online, utiliza-se os artigos de Park *et al.* (2011) e Kim e Lee (2017). É válido lembrar que esses *benchmarks* utilizam o algoritmo *quasi-min-max* para minimizar o limite superior da função  $\gamma(k)$ .

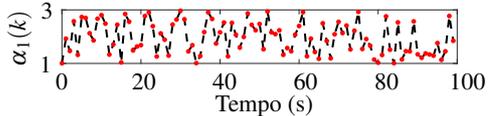
#### 7.1.2.1 Simulação I - Procedimento de resolução *offline*

As trajetórias assumidas pelos parâmetros  $\alpha(k)$  e  $\beta(k)$  são apresentadas na Figura 8(a)-(f). Todos os valores aleatórios de  $\alpha(k)$  e  $\beta(k)$  são gaussianos. Para evidenciar as vantagens do método proposto, é ampliado o limite máximo dos parâmetros  $\alpha(k)$  e  $\beta(k)$ . Nesse sentido, é válido informar que ao ampliar o limite máximo de cada parâmetro variante, os subintervalos são modelados novamente seguindo a metodologia utilizada anteriormente.

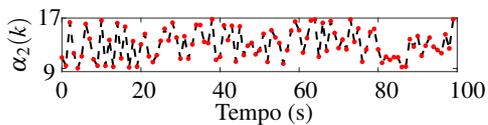
Figura 8 – Trajetórias dos parâmetros  $\alpha(k)$  e  $\beta(k)$  para o caso *offline*.



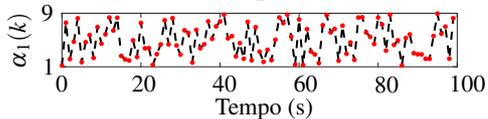
(a)  $\alpha(k) = \{\alpha_1(k), \alpha_2(k)\} \in [1 \ 5]$ .



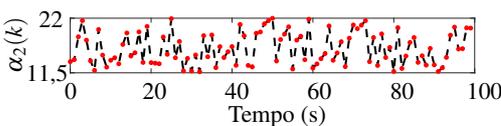
(b)  $\beta(k) = \{\beta_1(k), \beta_2(k)\} \in [0, 1 \ 1]$ .



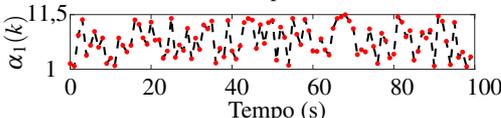
(c)  $\alpha(k) = \{\alpha_1(k), \alpha_2(k)\} \in [1 \ 17]$ .



(d)  $\beta(k) = \{\beta_1(k), \beta_2(k)\} \in [0, 1 \ 20]$ .



(e)  $\alpha(k) = \{\alpha_1(k), \alpha_2(k)\} \in [1 \ 22]$ .



(f)  $\beta(k) = \{\beta_1(k), \beta_2(k)\} \in [0, 1 \ 28]$ .

Esta metodologia considera a ação de chaveamento, que é ajustada através do parâmetro de projeto  $\nu$ . Para este caso,  $\nu$  é ajustado para  $1,5 \times 10^3$ . Os outros parâmetros são especificados conforme Rego e Costa (2023): os estados iniciais são  $x(0) = [-1,5 \quad -0,2]^T$  e  $\hat{x}(0) = [-0,5 \quad 1]^T$ , as matrizes de ponderação são  $R_z = \text{diag}([1 \quad 1])$  e  $R_u = 1$ , com  $\varepsilon = 0,001$ , e há uma restrição de entrada  $|u(k)| < 1$  para  $k \geq 0$ . Além disso, foi utilizado o mesmo vetor de excitação  $\hat{x}_{set}$  adotado por Rego e Costa (2023). Com esses parâmetros, foram obtidas as tabelas de consulta (Look-up tables) para o subsistema 1 e o subsistema 2 para as 10 primeiras iterações, conforme mostrado nas Tabelas 1 e 2.

De acordo com Wan e Kothare (2003), qualquer ganho associado a um  $k$  é capaz de estabilizar o sistema e a escolha de qual ganho será adotado está a critério do projetista. Neste caso, foi adotado  $k = 10$  das Tabelas 1 e 2. Então, ao selecionar os ganhos referentes aos subsistemas 1 e 2 a partir da Look-up table, é possível implementá-los na ação de controle. As Eqs. (7.13) e (7.14) definem, respectivamente, os ganhos de realimentação  $F_1$  e  $F_2$  em função dos parâmetros variantes apresentados na Figura 8.

$$F_1 = F_1^{(0)} + F_1^{(1)}\alpha_1(k) + F_1^{(2)}\beta_1(k) \quad (7.13)$$

$$F_2 = F_2^{(0)} + F_2^{(1)}\alpha_2(k) + F_2^{(2)}\beta_2(k) \quad (7.14)$$

Tabela 1 – *Look-Up table* para o subsistema 1.

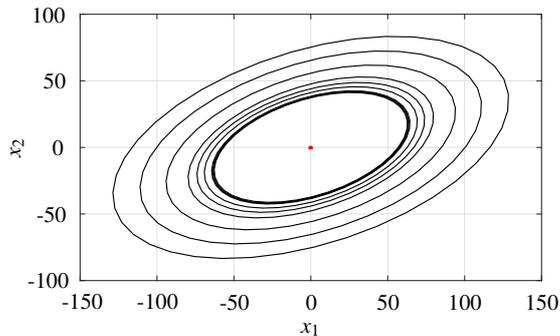
$k$	$F_1^{(0)}$	$F_1^{(1)}$	$F_1^{(2)}$
1	[0,0167 -0,0007]	[0,0551 -0,0196] $\times 10^{-12}$	[0,0335 0,0101] $\times 10^{-12}$
2	[0,0192 -0,0008]	[0,0838 -0,0397] $\times 10^{-12}$	[0,0548 0,0146] $\times 10^{-12}$
3	[0,0218 -0,0002]	[0,1449 -0,0767] $\times 10^{-12}$	[0,0574 0,0154] $\times 10^{-12}$
4	[0,0260 -0,0010]	[0,1270 0,1325] $\times 10^{-12}$	[0,2437 0,0981] $\times 10^{-12}$
5	[0,0275 0,0003]	[0,2790 -0,1202] $\times 10^{-12}$	[0,0810 0,0274] $\times 10^{-12}$
6	[0,0306 -0,0009]	[0,4403 -0,2656] $\times 10^{-12}$	[0,1332 0,0320] $\times 10^{-12}$
7	[0,0322 -0,0011]	[0,5134 -0,1888] $\times 10^{-12}$	[0,1394 0,0323] $\times 10^{-12}$
8	[0,0361 -0,0029]	[0,7458 0,0390] $\times 10^{-12}$	[0,1877 0,0519] $\times 10^{-12}$
9	[0,0319 -0,0002]	[0,4562 -0,2197] $\times 10^{-12}$	[0,1294 0,0343] $\times 10^{-12}$
10	[0,0314 0,0003]	[0,4496 -0,2494] $\times 10^{-12}$	[0,1304 0,0377] $\times 10^{-12}$

Tabela 2 – *Look-Up table* para o subsistema 2.

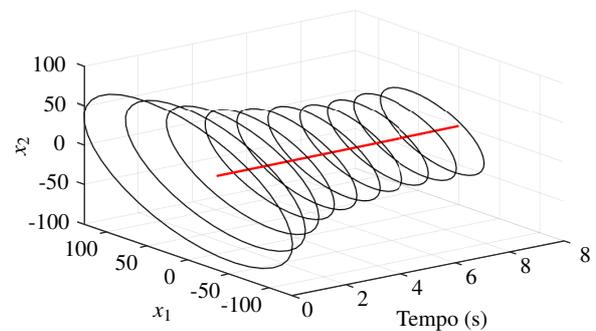
$k$	$F_2^{(0)}$	$F_2^{(1)}$	$F_2^{(2)}$
1	[0,0169 – 0,0023]	[0,1948 – 0,1049] $\times 10^{-12}$	[0,1355 0,0496] $\times 10^{-12}$
2	[0,0197 – 0,0027]	[0,2650 – 0,1887] $\times 10^{-12}$	[0,1994 0,0545] $\times 10^{-12}$
3	[0,0219 – 0,0022]	[0,4303 – 0,3014] $\times 10^{-12}$	[0,1694 0,0444] $\times 10^{-12}$
4	[0,0294 – 0,0050]	[0,9951 1,0454] $\times 10^{-12}$	[1,3875 0,3127] $\times 10^{-12}$
5	[0,0299 – 0,0040]	[0,9418 – 0,5067] $\times 10^{-12}$	[0,4910 0,0665] $\times 10^{-12}$
6	[0,0330 – 0,0050]	[2,0945 – 0,9390] $\times 10^{-12}$	[1,2359 0,1386] $\times 10^{-12}$
7	[0,0326 – 0,0036]	[1,6232 – 0,1590] $\times 10^{-12}$	[0,4406 0,1091] $\times 10^{-12}$
8	[0,0328 – 0,0023]	[2,1032 – 0,8000] $\times 10^{-12}$	[0,7484 0,1655] $\times 10^{-12}$
9	[0,0312 – 0,0008]	[2,1471 – 1,4647] $\times 10^{-12}$	[0,8387 0,2331] $\times 10^{-12}$
10	[0,0306 0,0001]	[1,8791 – 1,2485] $\times 10^{-12}$	[0,7479 0,2461] $\times 10^{-12}$

A Figura 7 ilustra as elipsóides de estabilidade no plano 2D e 3D, designadas por  $G_{\sigma(k)}^{-1}$  para 10 pontos discretos. Examinando as Figuras 7a e 7b, nota-se que, em ambas as situações, as elipsóides convergem para o centro, aproximando-se da origem do gráfico no estado estacionário. Adicionalmente, o vetor de excitação  $\hat{x}_{set}$  (representado pela curva vermelha) permanece contido na área definida pelas elipsóides de estabilidade, o que demonstra a robustez do sistema e, por conseguinte, a convergência ideal da metodologia proposta.

Figura 7 – Elipsóides de estabilidade.



(a) Elipsóides comutadas no plano 2D.



(b) Elipsóides comutadas no plano 3D.

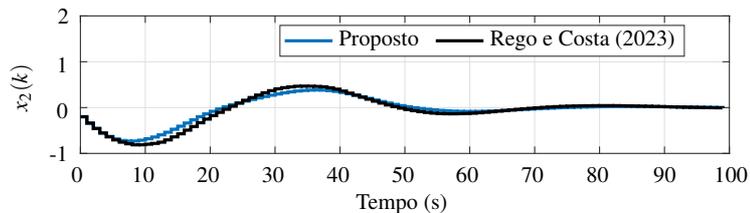
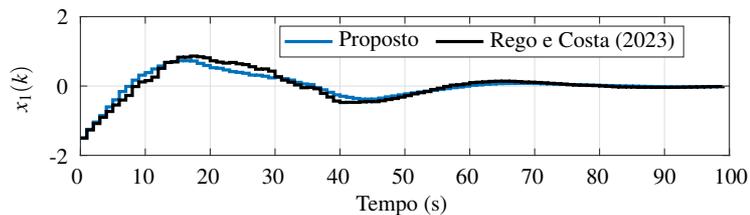
Para o SW-AW, é necessário calcular o conjunto de ganhos de compensação AW resolvendo a LMI (5.3) do Teorema 9. Assim, são obtidos os ganhos  $K_1 = [-1,9758 \ -1,1744]$  e  $K_2 = [-2,5063 \ -1,2226]$  para os subsistemas 1 e 2, respectivamente. Além disso, para esse projeto, obtêm-se dois conjuntos de ganhos para o observador de estados comutado por meio do Teorema 7 com a matriz de ponderação  $L_e = \text{diag}(1, 1)$  e taxa de decaimento  $\rho = \sqrt{0.6}$ . Assim, os ganhos comutados do observador de estados  $L_1 = [-0,5787 \ -1,3057]^T$  e  $L_2 = [-0,0542 \ -1,0528]^T$  para os subsistemas 1 e 2, respectivamente.

Aplicando ao sistema a metodologia apresentada por Rego e Costa (2023), a síntese do problema se torna infactível para  $\alpha > 17$  e  $\beta > 20$ . Por outro lado, o procedimento proposto nesta dissertação se torna infactível para  $\alpha > 22$  e  $\beta > 28$ . O que evidencia a melhoria do procedimento proposto.

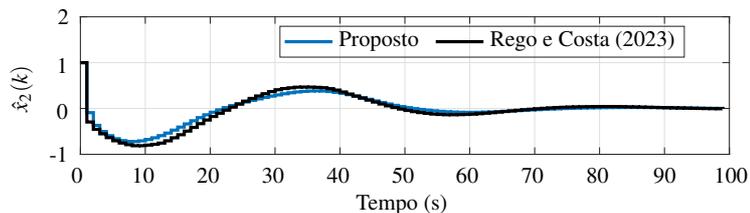
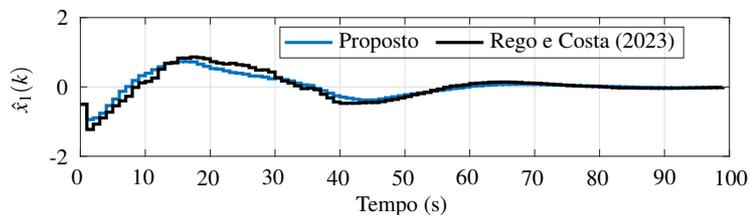
A Figura 9 ilustra a trajetória do sinal de chaveamento ao longo do tempo, a partir da obtenção das matrizes de estabilidade  $P_i$  por meio do Teorema 6 para diferentes limites de  $\alpha(k)$  e  $\beta(k)$ . Conforme observado nos gráficos, a comutação entre os subsistemas 1 e 2 ocorre de forma bem-sucedida à medida que os limites máximos de  $\alpha(k)$  e  $\beta(k)$  são ampliados.

As Figuras 8(a) e 8(b) ilustram o comportamento dos estados do sistema  $x(k)$  e dos estados estimados  $\hat{x}(k)$ , respectivamente. Esses estados são obtidos utilizando a técnica proposta neste trabalho e comparados com a metodologia de Rego e Costa (2023), para  $\alpha(k) \in [1, 5]$  e  $\beta(k) \in [0.1, 1]$ . O sistema com Anti-Windup comutado apresenta tempo de estabilização e overshoot menores comparado ao sistema operando com o controlador RMPC sem comutação.

Figura 8 – Trajetórias dos estados do sistema e estados estimados (*offline*).

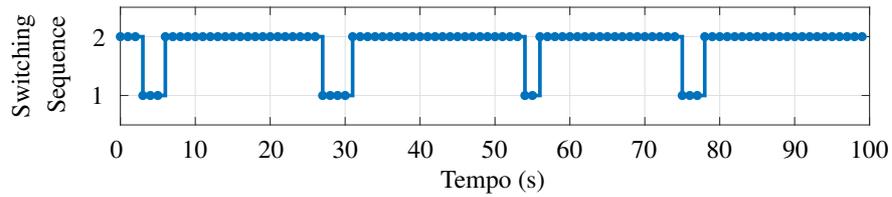


(a) Estados do sistema.

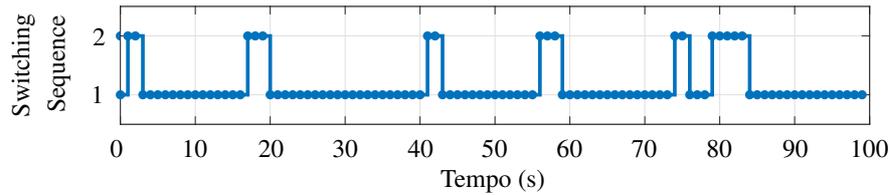


(b) Estados estimados do sistema.

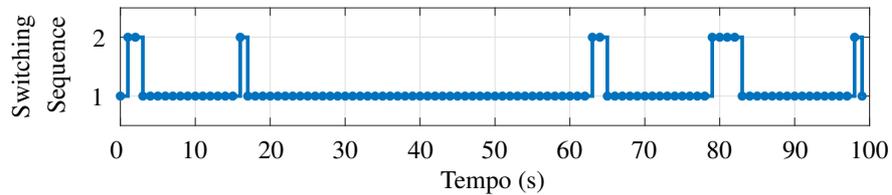
Figura 9 – Sequência de chaveamento para diferentes intervalos de  $\alpha(k)$  e  $\beta(k)$ .



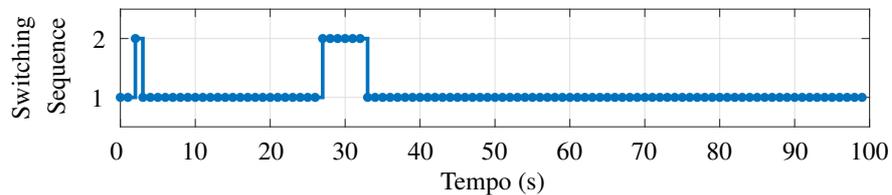
(a)  $\alpha(k) \in [1\ 5]$  e  $\beta(k) \in [0, 1\ 1]$ .



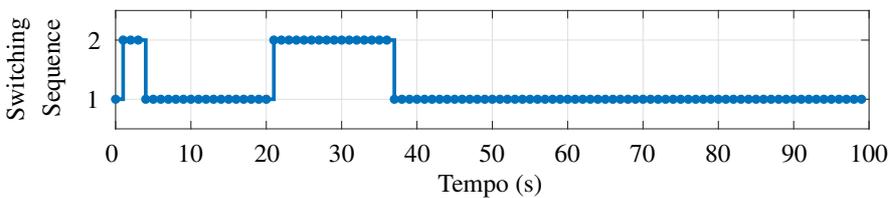
(b)  $\alpha(k) \in [1\ 17]$  e  $\beta(k) \in [0, 1\ 1]$ .



(c)  $\alpha(k) \in [1\ 22]$  e  $\beta(k) \in [0, 1\ 1]$ .



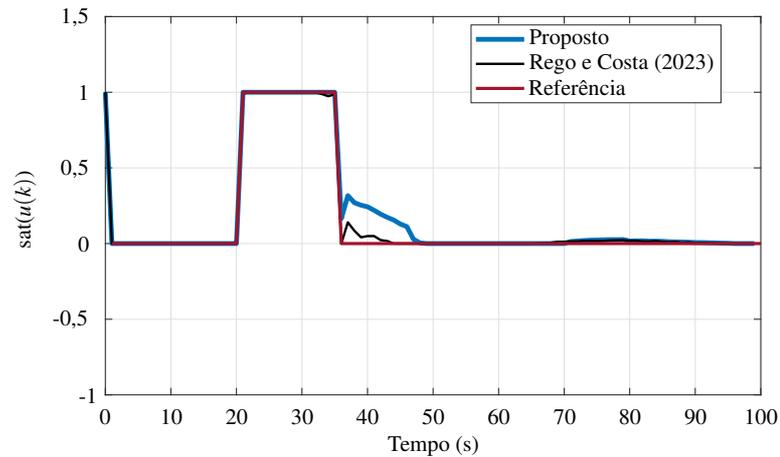
(d)  $\alpha(k) \in [1\ 5]$  e  $\beta(k) \in [0, 1\ 20]$ .



(e)  $\alpha(k) \in [1\ 5]$  e  $\beta(k) \in [0, 1\ 28]$

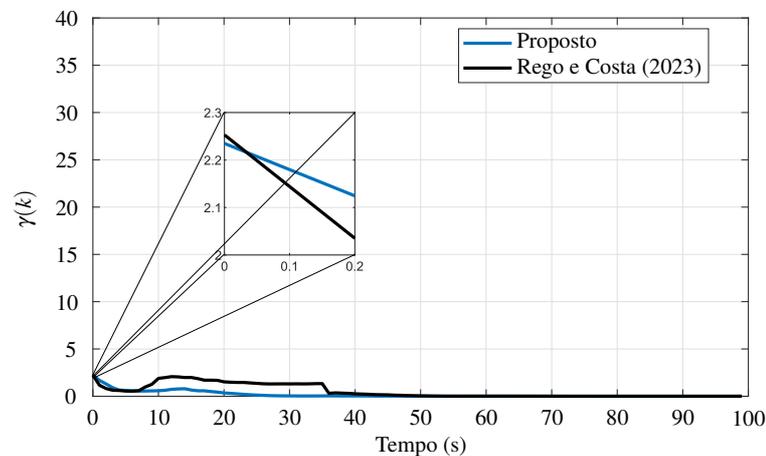
A Figura 10 ilustra o sinal de controle limitado por saturação  $u(k)$  comparando a metodologia proposta e a metodologia apresentada por Rego e Costa (2023). Em ambos os sinais de controle, a compensação Anti-Windup gera um sinal baseado na diferença entre a saída do controlador e a saída do atuador quando este está saturado. Esse sinal é então ajustado para o controle a fim de lidar com o fenômeno de windup causado pela saturação do atuador.

Figura 10 – Sinais de controle limitados por saturação para o procedimento *offline*.



A Figura 11 apresenta o limite superior do pior caso  $\gamma(k)$  da função objetivo, considerando os intervalos  $\alpha(k) \in [1 \ 5]$  e  $\beta(k) \in [0, 1 \ 1]$ , tanto para a metodologia adotada neste trabalho quanto para a metodologia desenvolvida por Rego e Costa (2023). Em geral, o limite superior do pior caso do procedimento proposto converge mais rápido e para valores mais baixos do que o benchmark, considerando o modelo comutado para sistemas LPV. Além disso,  $\gamma(0)$  na técnica de Rego e Costa (2023) é 2,253, enquanto no método proposto é 2,235.

Figura 11 – Função objetivo para o caso *offline*.



O desempenho do sistema com o controlador proposto é avaliado por meio de índices de desempenho não intrusivos, que são o Integral do valor Absoluto do Erro (*Integrated Absolute Error* - IAE), Integral do Quadrado do Erro (*Integral of Squared Error* - ISE), Integral do valor Absoluto do Erro ao longo do Tempo (*Integral of Time-weighted Absolute Error* - ITAE) e Integral do Quadrado do Erro ao longo do Tempo (*Integral of Time-weighted Squared Error* - ITSE) apresentados nas Eqs. (7.15)-(7.18), respectivamente. Para todos esses índices, quanto mais próximo de zero, mais eficiente é o sinal avaliado (OGATA, 1986; DORF; H., 1997).

Em resumo, o IAE minimiza o erro absoluto para garantir que a resposta do sistema seja o mais próximo possível da referência, o ISE penaliza erros grandes de forma mais severa do que erros pequenos, o ITAE minimiza o impacto de erros em tempos tardios, favorecendo respostas rápidas e eficientes, o ITSE enfatiza o erro em tempos tardios, mas com mais penalização para erros grandes (OGATA, 1986; DORF; H., 1997). Portanto, a escolha desses índices visa verificar a performance do sinal em relação a diferentes critérios de desempenho, como rapidez, precisão e suavidade do sistema dinâmico em análise.

$$IAE = \sum_{i=1}^{N_k} (ref_i - y_i) \quad (7.15)$$

$$ISE = \sum_{i=1}^{N_k} (ref_i - y_i)^2 \quad (7.16)$$

$$ITAE = \sum_{i=1}^{N_k} i(ref_i - y_i) \quad (7.17)$$

$$ITSE = \sum_{i=1}^{N_k} i(ref_i - y_i)^2 \quad (7.18)$$

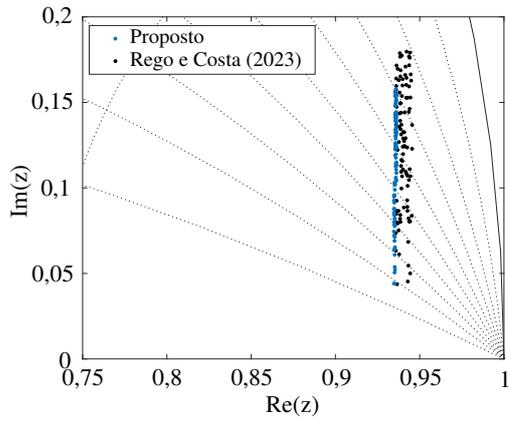
Os resultados dos índices são apresentados na Tabela 3, na qual é possível afirmar que o controlador proposto fornece um melhor desempenho em termos de todas as métricas avaliadas para  $x(k)$  e  $\hat{x}(k)$  levando em consideração as condições iniciais  $x(0)$  e  $\hat{x}(0)$  adotadas.

Tabela 3 – Índices não-intrusivos para  $x(k)$  e  $\hat{x}(k)$  (*offline*).

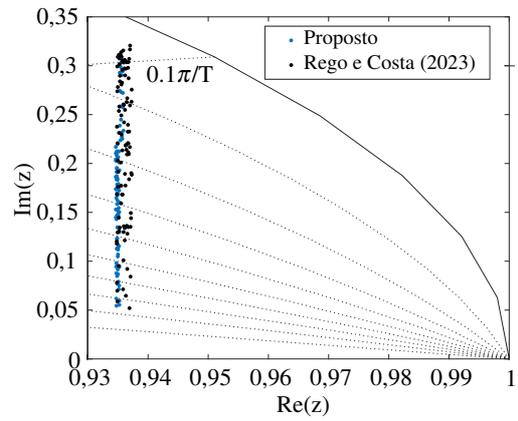
	Estados do Sistema $x(k)$		Estados Estimados do Sistema $\hat{x}(k)$	
	Rego e Costa (2023)	Proposto	Rego e Costa (2023)	Proposto
IAE	50,0679	<b>41,0643</b>	49,8434	<b>39,8190</b>
ISE	27,7685	<b>20,1694</b>	27,0635	<b>18,0741</b>
ITAE	1277,9222	<b>981,1135</b>	1277,6784	<b>978,7624</b>
ITSE	479,4603	<b>300,5723</b>	479,1128	<b>297,4276</b>

A Figura 12 apresenta os polos em malha fechada no plano-z. Analogamente ao que foi realizado em Rego e Costa (2023), é realizada a análise da locação dos polos com os valores ampliados dos parâmetros variantes. nesse sentido, tanto na metodologia proposta quanto na metodologia apresentada em Rego e Costa (2023), as raízes da equação característica estão localizadas dentro do círculo unitário. Todavia, a metodologia proposta neste trabalho fornece valores maiores para os intervalos dos parâmetros.

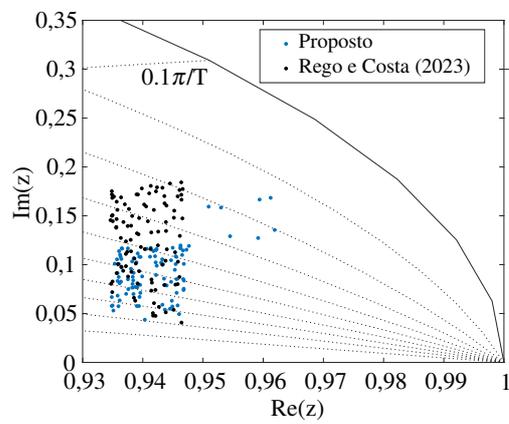
Figura 12 – Localização dos polos para diferentes intervalos de  $\alpha(k)$  e  $\beta(k)$  (*offline*).



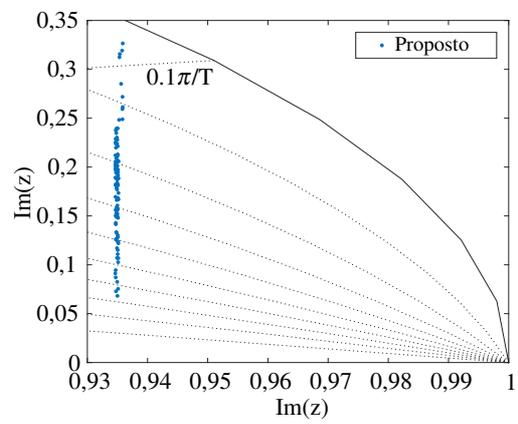
(a)  $\alpha(k) \in [1 \ 5]$  e  $\beta(k) \in [0, 1 \ 1]$ .



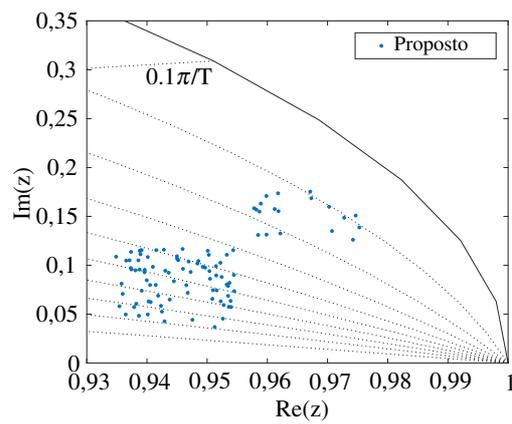
(b)  $\alpha(k) \in [1 \ 17]$  e  $\beta(k) \in [0, 1 \ 1]$ .



(c)  $\alpha(k) \in [1 \ 5]$  e  $\beta(k) \in [0, 1 \ 20]$ .



(d)  $\alpha(k) \in [1 \ 22]$  e  $\beta(k) \in [0, 1 \ 1]$ .

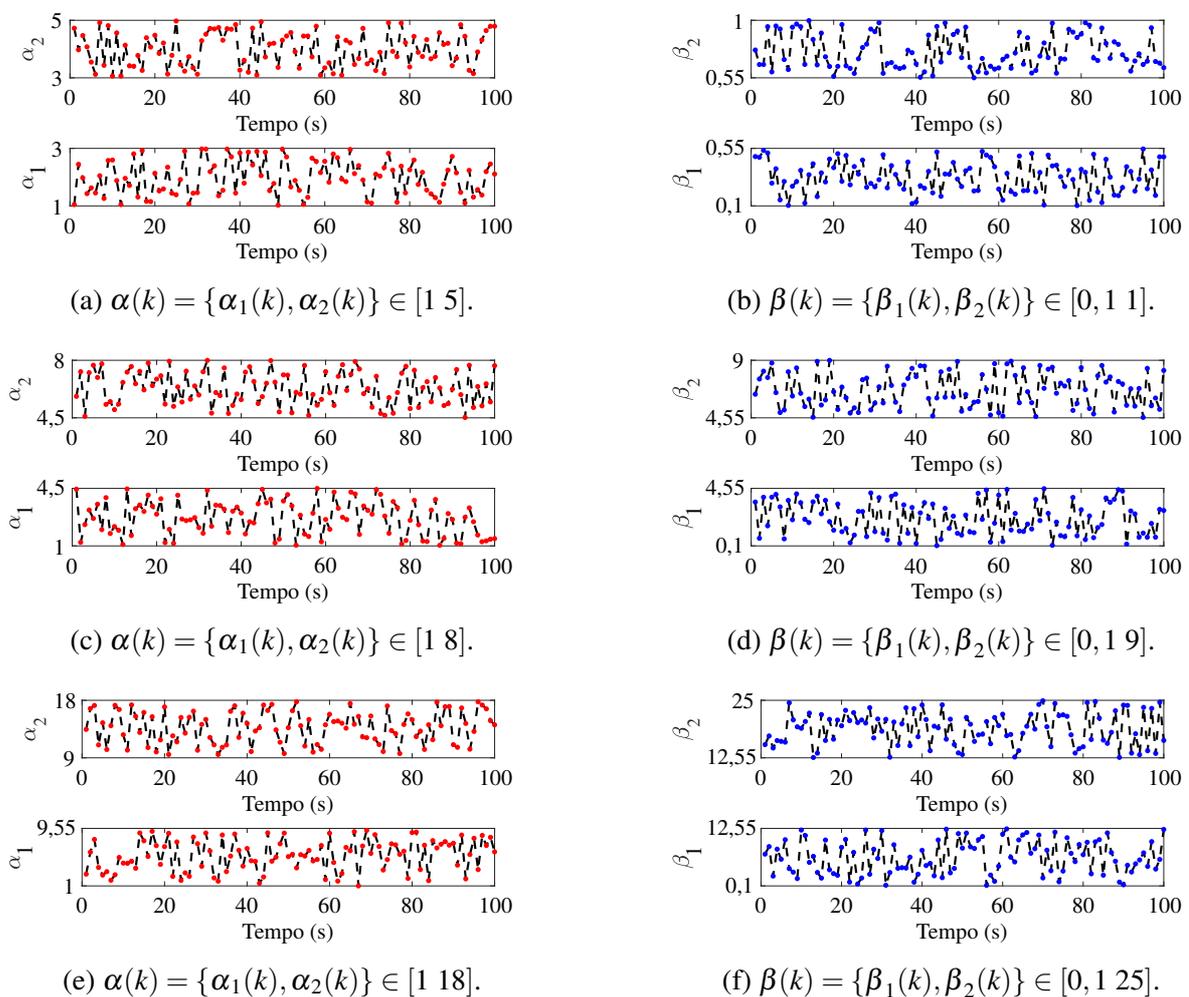


(e)  $\alpha(k) \in [1 \ 5]$  e  $\beta(k) \in [0, 1 \ 28]$ .

### 7.1.2.2 Simulação II - Procedimento de resolução *online*

As trajetórias dos parâmetros  $\alpha(k)$  e  $\beta(k)$  para o procedimento *online* são apresentadas na Figura 13. Assim como realizado no caso *offline*, é ampliado o limite máximo dos parâmetros  $\alpha(k)$  e  $\beta(k)$  para verificar a eficácia do método proposto. Logo, é pertinente mencionar que, ao expandir o limite máximo de cada parâmetro variante, os subsistemas são remodelados de acordo com a metodologia previamente adotada.

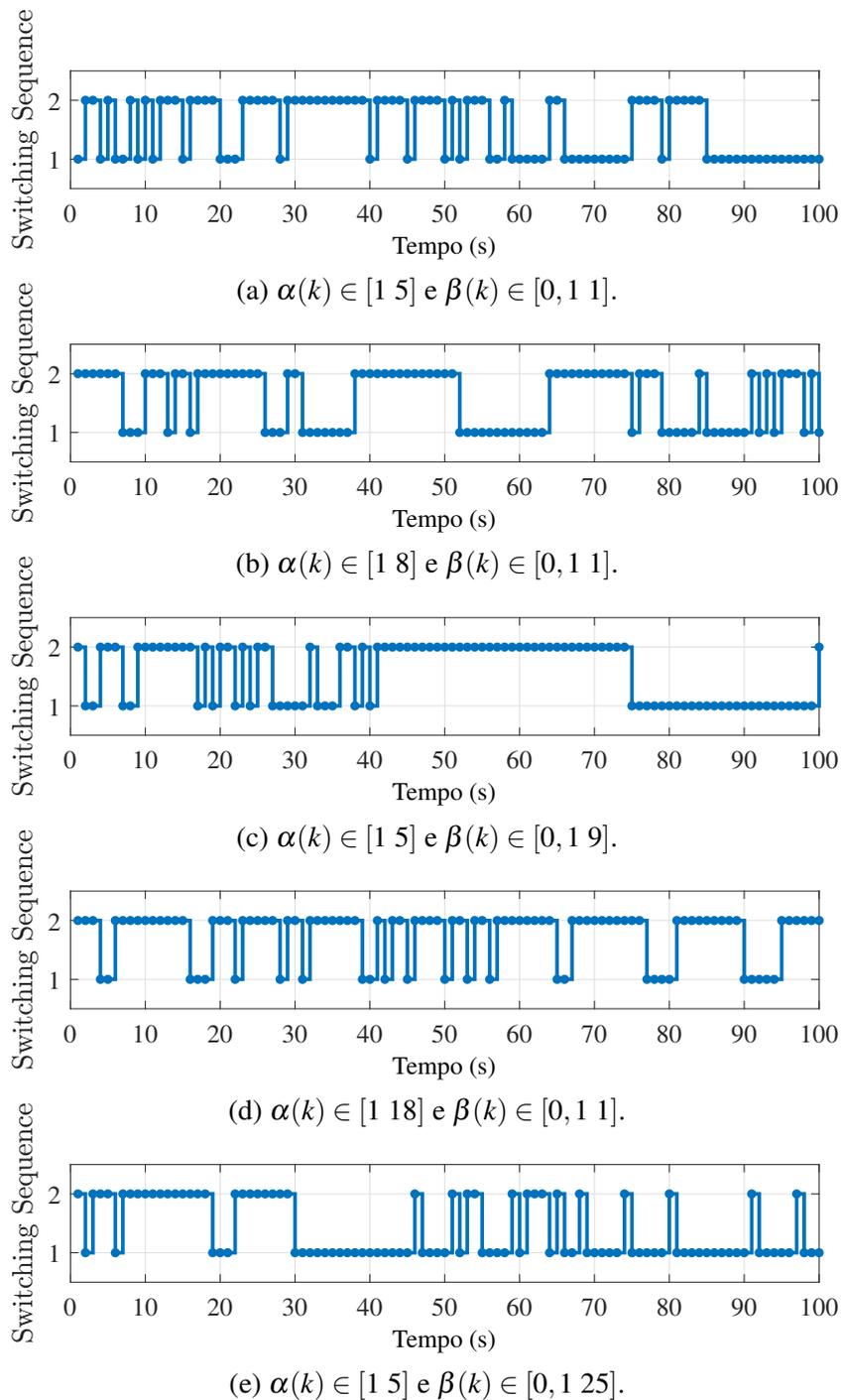
Figura 13 – Trajetórias dos parâmetros  $\alpha(k)$  e  $\beta(k)$  no procedimento *online*.



No estudo de Rego e Costa (2023), foi apresentado que a metodologia de Park *et al.* (2011) se torna ineficaz para  $\alpha > 8$  e  $\beta > 8$  e a metodologia de Kim e Lee (2017) se torna ineficaz para  $\alpha > 7$  e  $\beta > 9$ . Nesse sentido, ao aplicar a metodologia desenvolvida no presente trabalho, o procedimento de resolução *online* se torna ineficaz para  $\alpha > 18$  e  $\beta > 25$ . Indicando uma alternativa *online* eficiente para valores ampliados de  $\alpha(k)$  e  $\beta(k)$

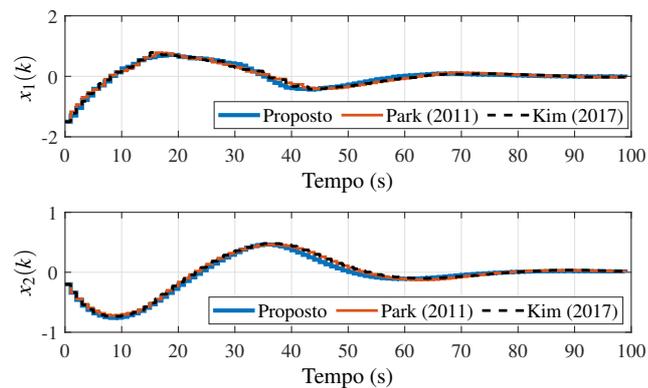
A Figura 14 apresenta a trajetória do sinal de chaveamento para diferentes intervalos dos parâmetros variantes  $\alpha(k)$  e  $\beta(k)$ , considerando as matrizes  $P_i$  obtidas por meio do procedimento de resolução *online*. Conforme pode ser visto na Figura 14, a alternância entre os subsistemas 1 e 2 ocorre com êxito à medida que os limites superiores de  $\alpha(k)$  e  $\beta(k)$  são ampliados.

Figura 14 – Sequência de chaveamento para diferentes intervalos de  $\alpha(k)$  e  $\beta(k)$ .

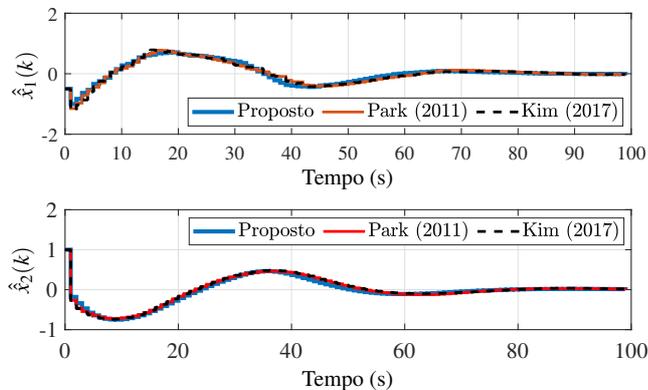


As Figuras 15(a) e 15(b) apresentam, respectivamente, a trajetória dos estados do sistema  $x(k)$  e dos estados estimados  $\hat{x}(k)$  ao longo do tempo considerando o procedimento de resolução *online*. Esses resultados foram obtidos utilizando os teoremas propostos neste trabalho e comparados com as metodologias de Park *et al.* (2011) e Kim e Lee (2017) para  $\alpha(k) \in [1 \ 5]$  e  $\beta(k) \in [0,1 \ 1]$ . Como pode ser verificado, a metodologia proposta apresenta um tempo de estabilização e overshoot menores em comparação com as metodologias dos *benchmarks*.

Figura 15 – Trajetórias dos estados do sistema e estados estimados (*online*).



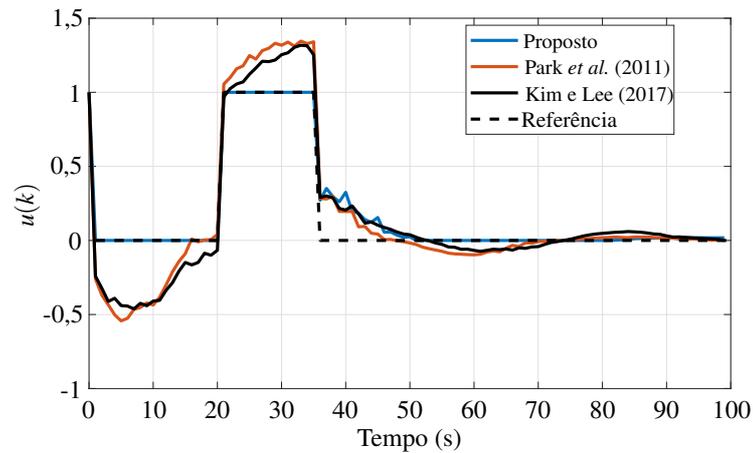
(a) Estados do sistema.



(b) Estados estimados do sistema.

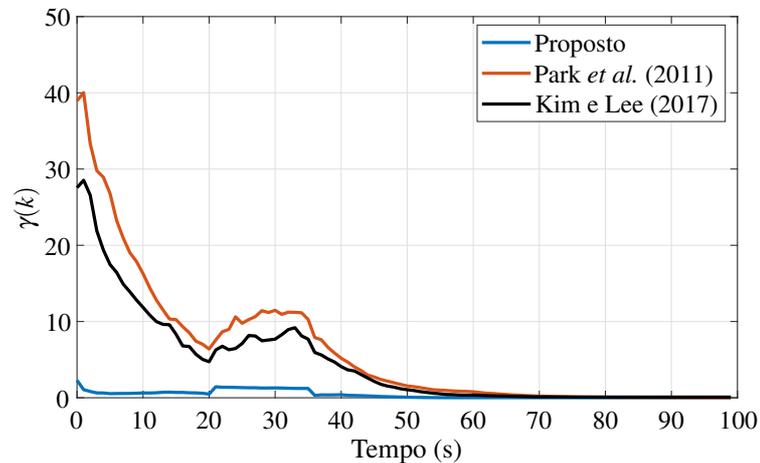
A Figura 16 apresenta o comportamento do sinal de controle da metodologia proposta e das metodologias de Park *et al.* (2011) e Kim e Lee (2017). Nos resultados provenientes das metodologias de Park *et al.* (2011) e Kim e Lee (2017), ocorre a saturação do sinal de controle, como havia sido verificado por Rego e Costa (2023). Por outro lado, na metodologia proposta, o problema de saturação do controlador é solucionado com um procedimento *online*.

Figura 16 – Sinais de controle limitados por saturação para o procedimento *online*.



A Figura 17 apresenta a minimização da função objetivo  $\gamma(k)$  proveniente do procedimento apresentado neste trabalho e nas metodologias apresentadas por Park *et al.* (2011) e Kim e Lee (2017), para os intervalos  $\alpha(k) \in [1 \ 5]$  e  $\beta(k) \in [0, 1 \ 1]$ . Nesse caso, a trajetória da função objetivo indica que a metodologia *online* proposta requer um custo operacional menor, uma vez que o valor de  $\gamma(0)$  na técnica proposta é 2,2879, enquanto a técnica de Park *et al.* (2011) fornece 38,9387 e Kim e Lee (2017) obtém 27,5579.

Figura 17 – Funções objetivo para procedimento *online*.

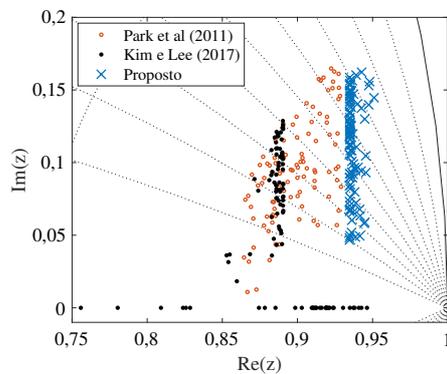
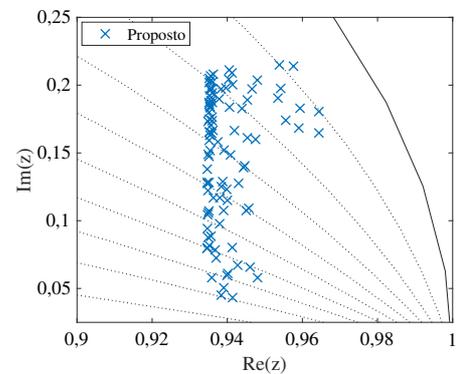
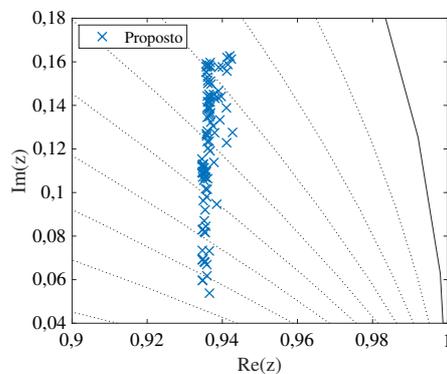
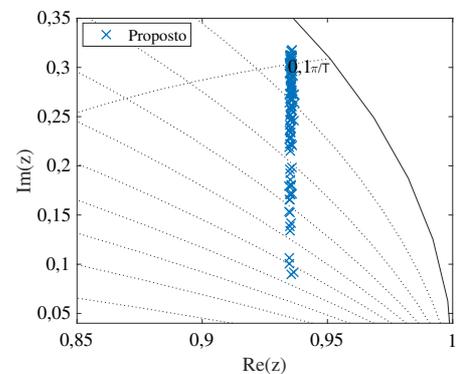
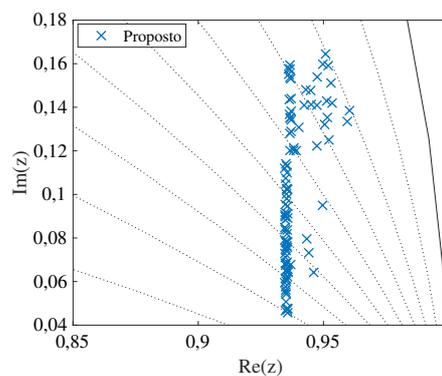


O desempenho da resposta temporal com o uso do controlador proposto é avaliado por meio dos índices IAE, ISE, ITAE e ITSE. Os resultados dos índices são apresentados na Tabela 4, na qual é possível averiguar que, no geral, o controlador proposto fornece um melhor desempenho para  $x(k)$  e  $\hat{x}(k)$  do que os *benchmarks*.

A Figura 18 apresenta a localização dos polos resultantes do procedimento de resolução com ganhos de realimentação *online*. Como pode ser verificado, a metodologia proposta apresenta uma maior região de factibilidade ao ser comparado com os *benchmarks*.

Tabela 4 – Índices não intrusivos para  $x(k)$  e  $\hat{x}(k)$  (*online*).

	Estados do Sistema $x(k)$			Estados Estimados do Sistema $\hat{x}(k)$		
	Park (2011)	Kim (2017)	Proposto	Park (2011)	Kim (2017)	Proposto
IAE	46,7478	47,3102	<b>46,2098</b>	46,7106	47,3592	<b>44,7303</b>
ISE	22,6666	<b>23,6406</b>	23,7659	22,2565	23,3798	<b>21,2774</b>
ITAE	1316,2195	1307,7358	<b>1199,2822</b>	1316,6046	1308,4477	<b>1194,3772</b>
ITSE	441,2939	448,2821	<b>429,4053</b>	441,4466	448,9752	<b>422,2182</b>

Figura 18 – Localização dos polos para  $\alpha(k)$  e  $\beta(k)$  ampliados (*online*).(a)  $\alpha(k) \in [1 \ 5]$  e  $\beta(k) \in [0, 1 \ 1]$ .(b)  $\alpha(k) \in [1 \ 8]$  e  $\beta(k) \in [0, 1 \ 1]$ .(c)  $\alpha(k) \in [1 \ 5]$  e  $\beta(k) \in [0, 1 \ 9]$ .(d)  $\alpha(k) \in [1 \ 18]$  e  $\beta(k) \in [0, 1 \ 1]$ .(e)  $\alpha(k) \in [1 \ 5]$  e  $\beta(k) \in [0, 1 \ 25]$ .

## 8 CONVERSOR *BOOST* CCTE

Neste capítulo será apresentada a modelagem do conversor *boost* no espaço de estados médio, a modelagem politópica e a partir dessas representações, formular o modelo politópico comutado que será utilizado na metodologia de controle proposta neste trabalho. O modelo do conversor *boost* utilizado nesta dissertação é proveniente dos artigos de Bascope e Barbi (2000) e Costa *et al.* (2017), tanto o esquemático como os parâmetros utilizados no circuito.

### 8.1 Modelagem do conversor *boost* CCTE

O conversor adotado neste trabalho é o *boost* CCTE, o qual o esquemático é apresentado na Figura 19 e os parâmetros estão presentes na Tabela 5. Por ser um modelo aproximado, a queda de tensão do diodo, as resistências dos interruptores, a corrente de magnetização do transformador e outras resistências parasitas não são consideradas (BASCOPE; BARBI, 2000; COSTA *et al.*, 2017).

Figura 19 – Conversor *boost* com célula de comutação três estados.

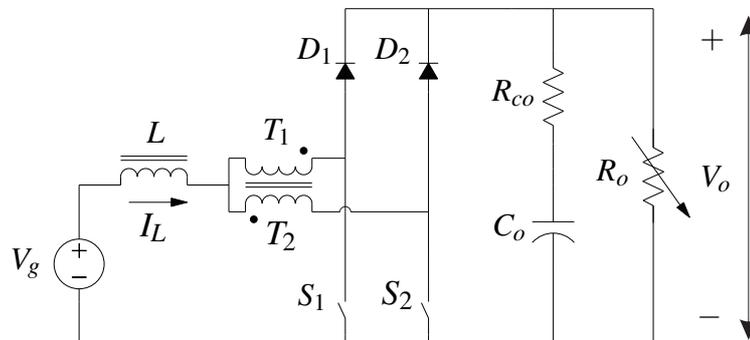


Tabela 5 – Parâmetros do conversor *boost*.

Parâmetro	Valor
Tensão de Entrada ( $V_g$ )	26 – 36 [V]
Tensão de Saída ( $V_o$ )	48[V]
Ciclo de Trabalho (Dcycle)	0,25 – 0,46
Frequência de chaveamento ( $f_s$ )	20,8 [kHz]
Resistência do indutor ( $R + L$ )	0 [ $\Omega$ ]
Capacitor de Saída ( $C_o$ )	4000 [ $\mu F$ ]
Resistência série intrínseca do capacitor ( $R_{co}$ )	26,7 [ $m\Omega$ ]
Carga ( $R_o$ )	2,3 - 6,1 [ $m\Omega$ ]
Potência de Saída ( $P_o$ )	380 – 1000[W]
Tempo de amostragem ( $T_s$ )	1 [ms]

A célula de comutação de três estados opera de acordo com os quatro modos diferentes dos interruptores e diodos  $S_1$ ,  $S_2$  e  $D_1$ ,  $D_2$ . Três desses modos são classificados como modo de condução contínua (*Continuous Conduction Mode - CCM*, em inglês), no qual a corrente instantânea do indutor é diferente de zero em todos os pontos do ciclo. Somente o estado neutro é definido para o modo de condução descontínua (*Discontinuous Conduction Mode - DCM*, em inglês).

Ao analisar o conversor na Figura 19, os modos de operação são definidos como:

- Primeiro estado: os interruptores  $S_1$  e  $S_2$  estão conduzindo e os diodos  $D_1$  e  $D_2$  estão com polarização reversa;
- Segundo estado:  $S_1$  e  $D_2$  estão conduzindo e  $S_2$  e  $D_1$  estão bloqueados;
- Terceiro estado:  $S_1$  e  $S_2$  estão bloqueados e  $D_1$  e  $D_2$  estão conduzindo;
- Estado neutro:  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $D_1$  e  $D_2$  estão bloqueados (desligados).

#### 8.1.1 Modelo no espaço de estados médio para o conversor *boost* CCTE

O método de média do espaço de estados é definido pela média entre os modelos para o modo de operação de  $S_1$  e  $S_2$  no CCM, descritos no espaço de estados pelos sistemas (8.1) e (8.2), respectivamente.

$$S_1 : \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = A_1 \tilde{x}(t) + B_1 u(t) \\ V_o(t) = C_1 x(t) + D_1 u(t) \end{cases} \quad (8.1)$$

$$S_2 : \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = A_2 \tilde{x}(t) + B_2 u(t) \\ V_o(t) = C_2 x(t) + D_2 u(t) \end{cases} \quad (8.2)$$

Nos sistemas (8.1) e (8.2), a variável de estado é  $\tilde{x}(t) = [i_L \ v_c]^T$ , sendo  $i_L$  a corrente do indutor e  $v_c$  a tensão do capacitor. Portanto, o modelo médio resultará da operação do circuito elétrico para a chave conduzindo e do circuito com a chave bloqueada, assim como em um circuito equivalente do *boost* clássico.

Com base na modelagem desenvolvida em Costa *et al.* (2017), as matrizes de estado de (8.1) e (8.2) são definidas como:

Modo  $S_1$  ( $D_{cycle}$ ):

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_o(R_{co}+R_o)} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8.3)$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{R_o}{R_{co}+R_o} \end{bmatrix}, \quad D_1 = 0$$

Modo  $S_2$  ( $1 - D_{cycle}$ ):

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{bmatrix} \frac{R_{co}||R_o}{L} & -\frac{R_{co}}{L(R_{co}+R_o)} \\ -\frac{R_{co}}{C_o(R_{co}+R_o)} & -\frac{1}{C_o(R_{co}+R_o)} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}, \\ C_2 &= \begin{bmatrix} R_{co}||R_o & \frac{R_o}{R_{co}+R_o} \end{bmatrix}, \quad D_2 = 0 \end{aligned} \quad (8.4)$$

Portanto, o modelo médio no espaço de estado para o conversor é representado pelo sistema (8.5).

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_t x(t) + B_t u(t) \\ y(t) &= C_t x(t) + D_t u(t) \end{aligned} \quad (8.5)$$

No sistema (8.5), as matrizes são dadas por (8.6)-(8.9).

$$A_t(t) = A_1(t)D_{cycle} + A_2(t)(1 - D_{cycle}) \quad (8.6)$$

$$B_t(t) = (A_1(t) - A_2(t))X + (B_1(t) - B_2(t))V_g \quad (8.7)$$

$$C_t(t) = C_1(t)D_{cycle} + C_2(t)(1 - D_{cycle}) \quad (8.8)$$

$$D_t(t) = (C_1(t) - C_2(t))X \quad (8.9)$$

Em (8.7) e (8.8), a matriz  $X$  é dada pela Eq. (8.10)

$$X = \frac{V_g(t)}{R'} \begin{bmatrix} 1 \\ (1 - D_{cycle})R_o(t) \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

Portanto, as matrizes do sistema são expressas por (8.11)-(8.14).

$$A_t = \begin{bmatrix} -\frac{(1-D_{cycle})(R_{co}||R_o(t))}{L} & -\frac{(1-D_{cycle})R_o}{L(R_{co}+R_o(t))} \\ \frac{(1-D_{cycle})R_o(t)}{C_o(R_{co}+R_o(t))} & -\frac{1}{C_o(R_{co}+R_o(t))} \end{bmatrix} \quad (8.11)$$

$$B_t = \begin{bmatrix} \left(\frac{R_{co}}{L}\right) \frac{(1-D_{cycle})R_o(t)+R_{co}}{(R_{co}+R_o(t))} \\ -\frac{R_o}{C_o(R_{co}+R_o(t))} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_g(t) \\ R' \end{pmatrix} \quad (8.12)$$

$$C_t = \begin{bmatrix} (1 - D_{cycle})(R_{co}||R_o(t)) & \frac{R_o}{R_{co}+R_o} \end{bmatrix} \quad (8.13)$$

$$D_t = -V_g(t) \frac{R_{co}||R_o(t)}{R'} \quad (8.14)$$

Em (8.11)-(8.14),  $D_{cycle}$  é o ciclo de trabalho, a saída controlada  $y(t)$  corresponde a tensão de saída  $V_o(t)$  e  $R' = (1 - D_{cycle})^2 R_o + D_{cycle}(1 - D_{cycle})(R_{co}||R_o)$ .

### 8.1.2 Modelo politópico comutado para o conversor *boost* CCTE

A partir da análise das Eqs. (8.11)-(8.14), torna-se evidente que as matrizes de estados do conversor *boost* são modificadas de acordo com a tensão de entrada ( $V_g$ ) e a potência de saída ( $P_o$ ), que são funções da resistência de carga ( $R_o$ ) e o ciclo de trabalho ( $D_{cycle}$ ) como representado nas Eqs. (8.15) e (8.16), respectivamente. Então, as variáveis  $V_g$  e  $P_o$  podem ser consideradas como parâmetros variantes ou incertezas do sistema, pois variam dentro dos limites operacionais projetados.

$$R_o(t) = \frac{V_o^2}{P_o}, \quad P_o \in [P_{o,\min} \ P_{o,\max}] \quad (8.15)$$

$$D_{cycle} = 1 - \frac{V_g}{V_o}, \quad V_g \in [V_{g,\min} \ V_{g,\max}] \quad (8.16)$$

Logo, baseado em (8.15) e (8.16), o sistema (8.5) pode ser reescrito em função de  $V_g$  e  $P_o$  como em (8.17).

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_t(V_g, P_o)x(t) + B_t(V_g, P_o)u(t) \\ y(t) &= C_t(V_g, P_o)x(t) + D_t(V_g, P_o)u(t) \end{aligned} \quad (8.17)$$

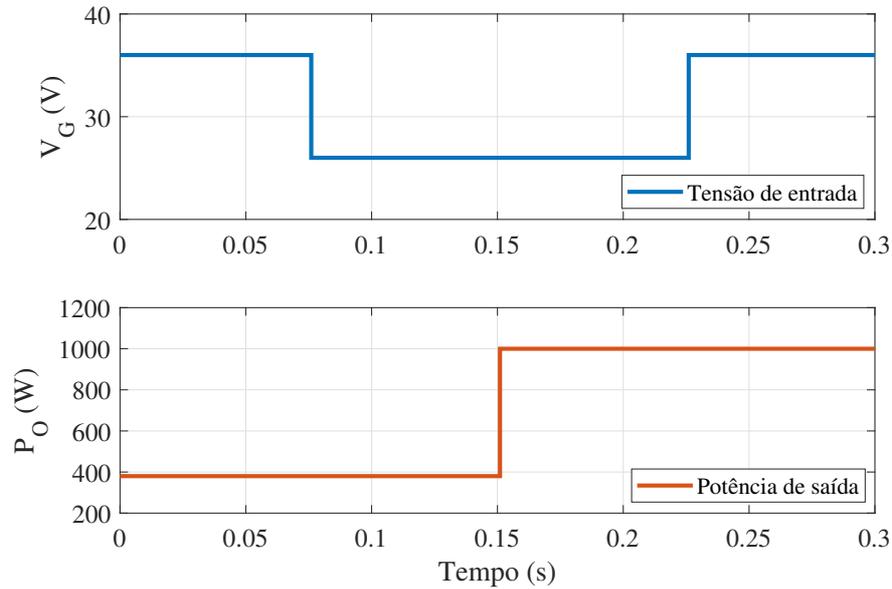
Para aplicar a metodologia de controle proposta, é necessário obter um modelo no tempo discreto. Neste caso, foi adotada a aproximação de Euler com um tempo de amostra  $T_s$ , como expresso em (8.18), e dessa forma, possibilitar a implementação digital da planta.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} i_L(k+1) \\ v_c(k+1) \end{bmatrix} &= (I + T_s A_{\sigma(k)}) \begin{bmatrix} i_L(k) \\ V_c(k) \end{bmatrix} + T_s B_{\sigma(k)} u(k) \\ y(k) &= C_{\sigma(k)} x(k) + D_{\sigma(k)} u(k) \end{aligned} \quad (8.18)$$

No sistema (8.18),  $i_L$  é a corrente no indutor,  $v_c$  é a tensão no capacitor e  $A_{\sigma(k)}$ ,  $B_{\sigma(k)}$ ,  $C_{\sigma(k)}$  e  $D_{\sigma(k)}$  são as matrizes comutadas do modelo do conversor *boost*. Analogamente ao que foi realizado por Alves (2023), adota-se uma abordagem politópica comutada para a implementação da técnica proposta.

Dessa forma, o modelo comutado do conversor é representado por meio de uma estrutura politópica, dada pelo ponto de operação dos modelos locais. Então, a partir da variação da tensão de entrada e da potência de saída apresentada na Figura 20, são obtidos os subsistemas representados em (8.19)-(8.22).

Figura 20 – Tensão de entrada e potência de saída.



- Substema 1:  $\Omega_1 = Co\{[A_1 \ B_1] \ [A_2 \ B_2]\}$

- $f(36V, 1000W)$

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -0,2838 & -7,7479 \\ 0,0634 & -0,1136 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} 580,4784 \\ 65,2796 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= \begin{bmatrix} 0,0198 & 0,9885 \end{bmatrix}, & D_1 &= -0,7304 \end{aligned} \quad (8.19)$$

- $f(26V, 1000W)$

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{bmatrix} 0,0958 & -8,4508 \\ 0,0691 & 0,2660 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 851,9917 \\ 53,4467 \end{bmatrix}, \\ C_2 &= \begin{bmatrix} 0,0143 & 0,9885 \end{bmatrix}, & D_2 &= -1,0054 \end{aligned} \quad (8.20)$$

- Substema 2:  $\Omega_2 = Co\{[A_3 \ B_3] \ [A_4 \ B_4]\}$

- $f(36V, 380W)$

$$\begin{aligned} A_3 &= \begin{bmatrix} -0,3102 & -7,9645 \\ 0,0652 & -0,1119 \end{bmatrix}, & B_3 &= \begin{bmatrix} 542,7337 \\ 68,8140 \end{bmatrix}, \\ C_3 &= \begin{bmatrix} 0,0199 & 0,9956 \end{bmatrix}, & D_3 &= -0,2802 \end{aligned} \quad (8.21)$$

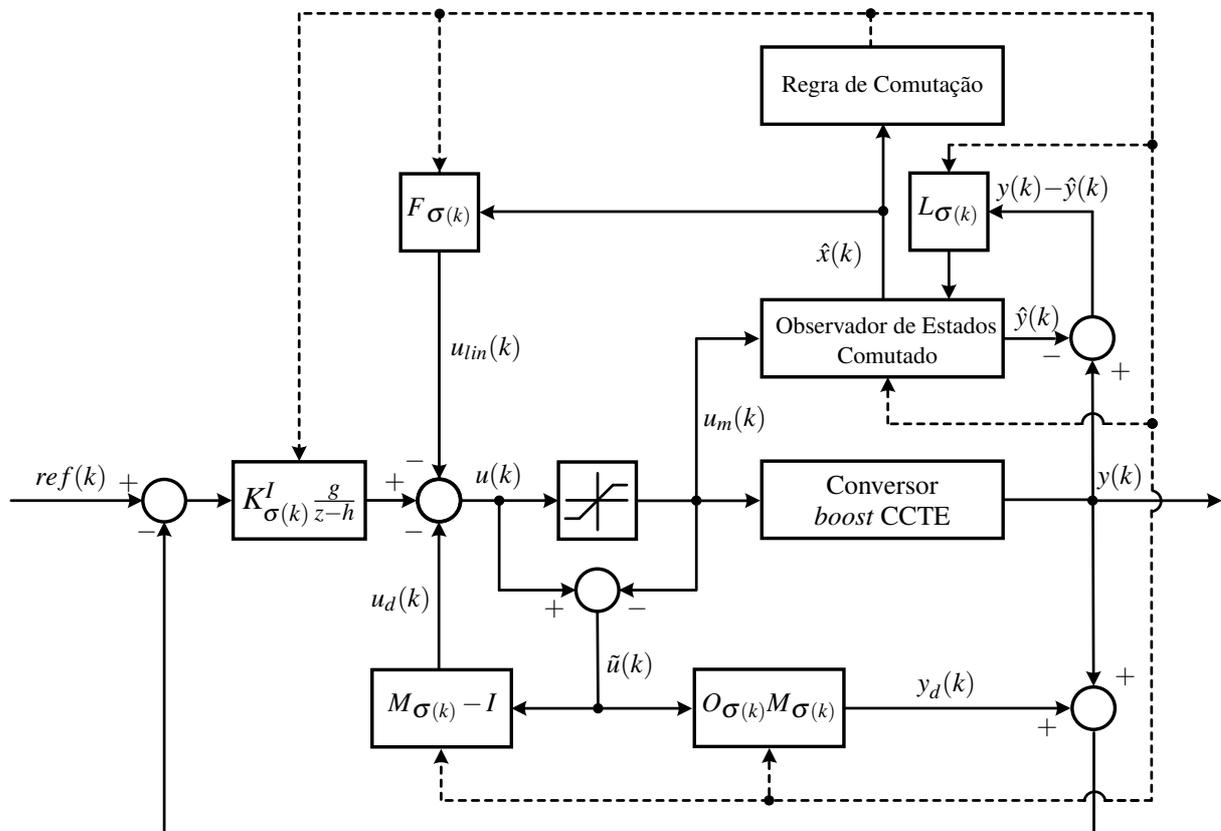
- $f(26V, 380W)$

$$\begin{aligned} A_4 &= \begin{bmatrix} 0,0759 & -8,7329 \\ 0,0715 & 0,2873 \end{bmatrix}, & B_4 &= \begin{bmatrix} 814,2744 \\ 58,5879 \end{bmatrix}, \\ C_4 &= \begin{bmatrix} 0,0144 & 0,9956 \end{bmatrix}, & D_4 &= -0,3871 \end{aligned} \quad (8.22)$$

## 8.2 Estratégia de controle para o conversor *boost* CCTE

A Figura 21 apresenta o diagrama de controle proposto para realizar o controle da tensão de saída do conversor, inspirado nos trabalhos de Costa *et al.* (2017) e Rego (2019). Nesse caso, a inovação consiste em aplicar a regra de comutação apresentada em Geromel e Colaneri (2006) para realizar o controle do conversor por meio da realimentação de saída com ganhos comutados.

Figura 21 – Diagrama de controle para o *boost* CCTE.



Na Figura 21,  $ref(k)$  é a referência do sinal de saída, que nesse caso, é  $V_o = 48V$ . As constantes  $g$ ,  $h$  são referentes ao grau de liberdade aplicadas aos ganhos  $K_{\sigma(k)}^I$  do servomecanismo de ação integral,  $F_{\sigma(k)}$  são os ganhos de realimentação de saída e  $L_{\sigma(k)}$  são os ganhos do observador de estados sujeitos à regra de comutação  $\sigma(k)$ .

Como pode ser verificado, o diagrama de controle da Figura 21 conta com a presença de compensador Anti-WindUp composto por um filtro de condicionamento comutado, dado por  $M_{\sigma(k)}$ . Então, assim como no exemplo numérico, é obtida uma matriz co-prima para cada um dos  $N$  subsistemas que formam o sistema global da Eq. (4.8).

Ao analisar a Figura 21, é possível definir matematicamente o compensador Anti-WindUp nas Eqs. (8.23)-(8.25).

$$x_d(k+1) = (A_{\sigma(k)} + B_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)})x_d(k) + B_{\sigma(k)}\tilde{u}(k) \quad (8.23)$$

$$u_d(k) = K_{\sigma(k)}x_d(k) \quad (8.24)$$

$$y_d(k) = (C_{\sigma(k)} + D_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)})x_d(k) + D_{\sigma(k)}\tilde{u}(k) \quad (8.25)$$

Então, a da derivada da ação integral é obtida ao realizar a diferença da saída com o Anti-Windup do sistema e de  $ref(k)$  como expresso na Eq. (8.26).

$$v(k+1) = (r(k) - y_{lin}(k))h + gv(k) \quad (8.26)$$

Na Eq (8.26),  $y_{lin}(k)$  é dada pela Eq. (8.27)

$$y_{lin}(k) = y(k) + y_d(k) \quad (8.27)$$

Os estados do sistema e os estados do observador de estados são dados pelas Eqs. (8.28) e (8.29), respectivamente.

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + B_{\sigma(k)}u(k) \quad (8.28)$$

$$\hat{x}(k+1) = A_{\sigma(k)}\hat{x}(k) + B_{\sigma(k)}u(k) + L_{\sigma(k)}(y(k) - \hat{y}(k)) \quad (8.29)$$

O sinal de controle  $u(k)$  é definido na Eq. (8.30).

$$u(k) = -F_{\sigma(k)}\hat{x}(k) + K_{\sigma(k)}^I v(k) - u_d(k) \quad (8.30)$$

Desse modo, ao substituir a Eq. (8.30) na Eq. (8.29), define-se a Eq. (8.31).

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) = & (A_{\sigma(k)} - B_{\sigma(k)}F_{\sigma(k)} - L_{\sigma(k)}C_{\sigma(k)})\hat{x}(k) + \\ & L_{\sigma(k)}C_{\sigma(k)}x(k) + K_{\sigma(k)}^I B_{\sigma(k)}v(k) - B_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)}x_d(k) \end{aligned} \quad (8.31)$$

Substituindo a Eq. (8.30) na Eq. (8.28), define-se Eq. (8.32).

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) - B_{\sigma(k)}F_{\sigma(k)}\hat{x}(k) + B_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)}^I v(k) - B_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)}x_d(k) \quad (8.32)$$

Substituindo  $i = \sigma(k)$ , obtém-se por inspeção a equação no espaço de estado do controlador com o observador e a ação integral na Eq. (8.33).

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \hat{x}(k+1) \\ v(k+1) \\ x_d(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & -B_iF_i & B_iK_i^I & -B_iK_i \\ L_iC_i & A_i - B_iF_i - L_iC_i & B_iK_i^I & -B_iK_i \\ -hC_i & hD_iF_i & g - hK_i^I D_i & hC_i \\ 0 & 0 & 0 & A_iK_i + B_iK_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \\ v(k) \\ x_d(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \\ 0 \end{bmatrix} r(k) \quad (8.33)$$

Por meio do equacionamento apresentado, torna-se possível aplicar o controle por realimentação de saída comutada ao *boost*. Nas subseções seguintes serão discutidos os resultados das simulações numéricas referentes ao controle do conversor fazendo uso da modelagem do sistema apresentada no Capítulo 8.

### 8.3 Resultados das simulações do conversor *boost* CTE

Esta seção apresenta os resultados referentes à implementação da metodologia proposta no *boost* CTE. A princípio, a subseção 8.2 aborda a estratégia de controle para o *boost*, apresentando o diagrama de controle proposto e a formulação matemática para o controle. Em seguida, a subseção 8.3.1 discute sobre os resultados realizando uma análise comparativa com um *benchmark*, enquanto a subseção 8.3.2 apresenta uma comparação com o modelo estimado.

#### 8.3.1 Análise comparativa SOF-RMPC vs RMPC

Nesta subseção serão apresentados os resultados do controle do *boost* utilizando a metodologia proposta e, então, compará-los com o RMPC proveniente de Rego (2019). Nesse sentido, para realizar o procedimento de otimização, foram considerados  $R_x = \text{diag}([1 \ 1 \ 1])$  e  $R_u = 0, 1$ . Então, a partir da *look-up table*, foram escolhidos ganhos presentes nas Eqs. (8.34) e (8.35) para os subsistemas 1 e 2, respectivamente.

$$F_{SOF-RMPC_1} = \underbrace{[-0,1748 \ 1,3728]}_{F_1} \underbrace{[0,8809]}_{K_1^I} \times 10^{-3} \quad (8.34)$$

$$F_{SOF-RMPC_2} = \underbrace{[-0,2152 \ 3,4743]}_{F_2} \underbrace{[0,4161]}_{K_2^I} \times 10^{-3} \quad (8.35)$$

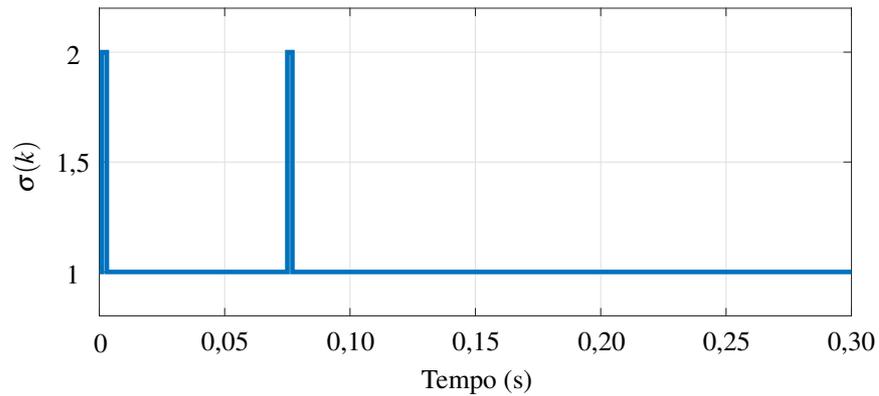
Com relação do Anti-Windup, foi possível obter os ganhos apresentados nas Eqs. (8.36) e (8.36) por meio da aplicação do Teorema 9.

$$K_1 = [-0,5004 \ 3,7199] \times 10^{-3} \quad (8.36)$$

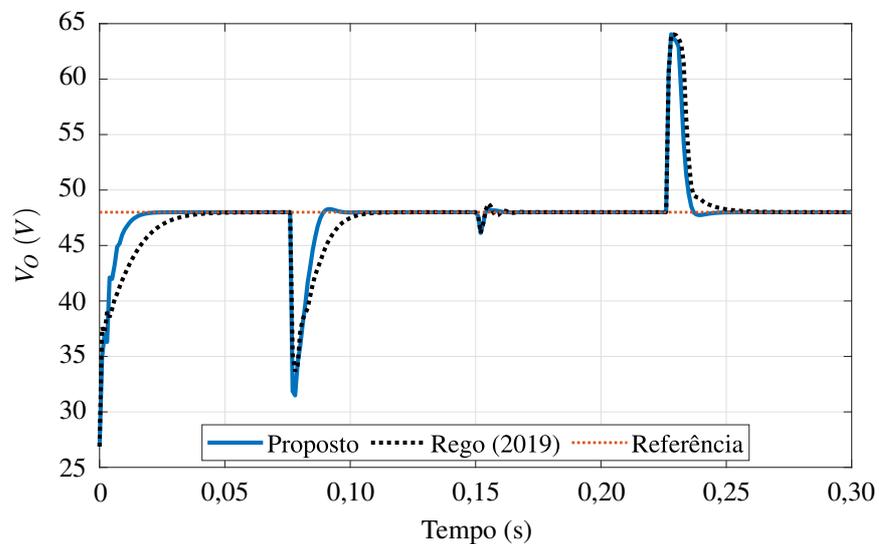
$$K_2 = [-0,5004 \ 3,7199] \times 10^{-3} \quad (8.37)$$

A Figura 22 apresenta a sequência de chaveamento obtido na simulação para a estabilização do conversor *boost*. Esse chaveamento é resultante da regra de comutação expressa na Eq. (4.10), a qual utiliza as matrizes de estabilidade comutadas  $P_{\sigma(k)}$  provenientes da aplicação do Teorema 6. Ao analisar o gráfico, é perceptível que o chaveamento entre os subsistemas ocorreu de forma bem-sucedida.

Figura 22 – Sequência de chaveamento.

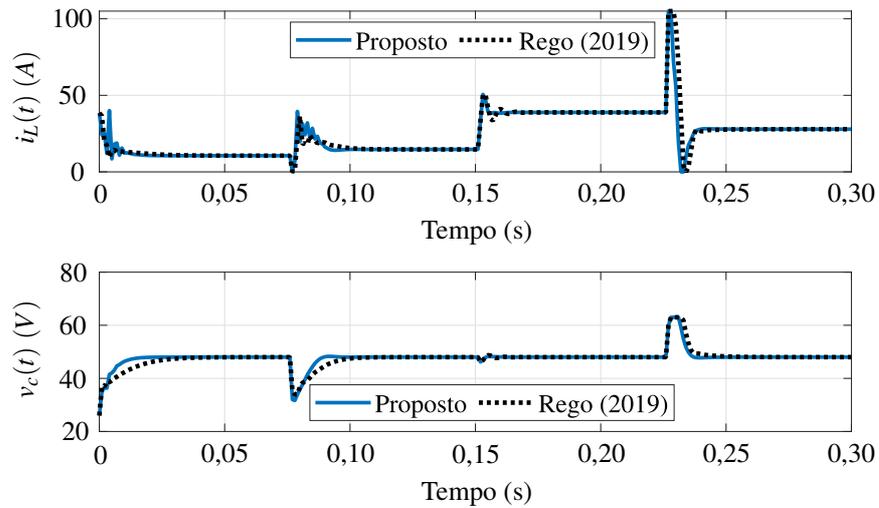


Na Figura 23, é possível verificar o resultado da estabilização do conversor utilizando a técnica de controle proposta em comparação com o RMPC proposto em Rego (2019). Ambos controladores são capazes de estabilizar a tensão de saída e seguir a referência. Todavia, o SOF-RMPC com SW-AW apresenta um melhor resultado ao ser comparado com o RMPC do *benchmark*. Nesse caso, a metodologia proposta apresenta transitórios com menor duração, fornecendo recuperação de regime mais rápida que o RMPC sem a regra de comutação.

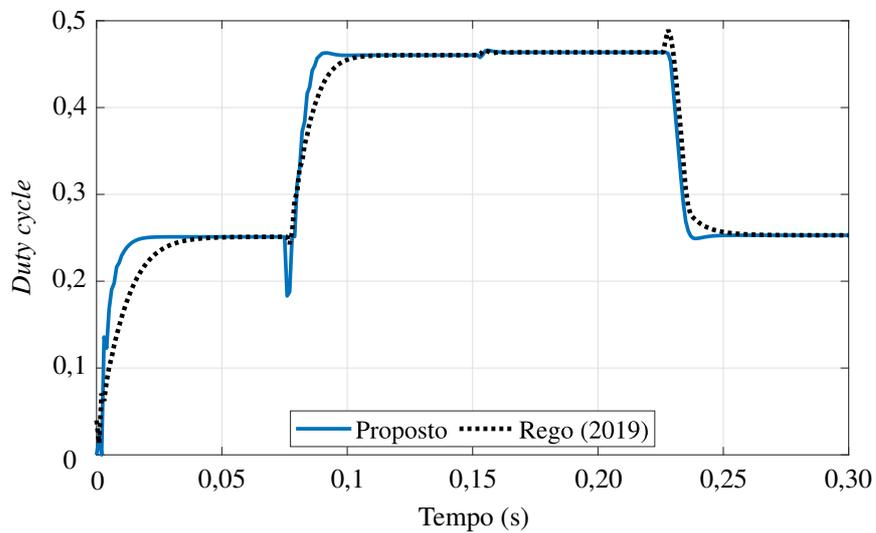
Figura 23 – Tensão de saída  $V_o(t)$ .

A Figura 24 apresenta a resposta ao longo do tempo da corrente no indutor ( $i_L$ ) e da tensão no capacitor ( $v_c$ ) do SOF-RMPC e do RMPC sem ação de comutação no diagrama de controle formulado por Rego (2019). Verifica-se que em ambos os casos os sinais são estáveis. Contudo, no geral, a metodologia apresenta transitórios mais suaves para a tensão no capacitor e para a corrente no indutor.

Figura 24 – Corrente no indutor e tensão no capacitor.



A Figura 25 exibe o sinal de controle  $u(k)$ . Por meio desse gráfico, nota-se que ambos sinais atendem a restrição  $u_{max} = 0.5$ . Além disso, a metodologia proposta apresenta um menor tempo para estabilização do que o *benchmark* adotado. Todavia, é possível notar que a estratégia proposta apresenta um maior *overshoot* do que o *benchmark* em alguns pontos.

Figura 25 – Sinal de controle (*Duty Cycle*).

### 8.3.2 Análise comparativa do resultado estimado

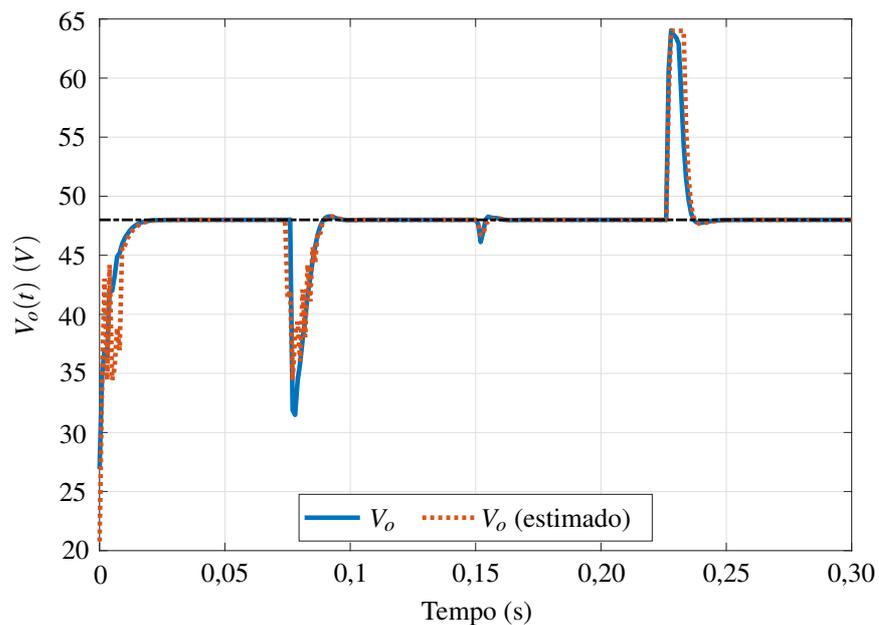
Esta subsecção apresenta uma análise comparativa entre o resultado real e o estimado para a metodologia proposta nesta dissertação. Para isso, foi considerado  $L_e = \text{diag}([1 \ 1])$  e  $\rho = \sqrt{0,6}$  para obter os ganhos do observador a partir do Teorema 7, apresentados nas Eqs. (8.38) e (8.39) para os subsistemas 1 e 2, respectivamente.

$$L_1 = [-8,5438 \ 0,2705]^T \quad (8.38)$$

$$L_2 = [-8,7669 \ 0,2900]^T \quad (8.39)$$

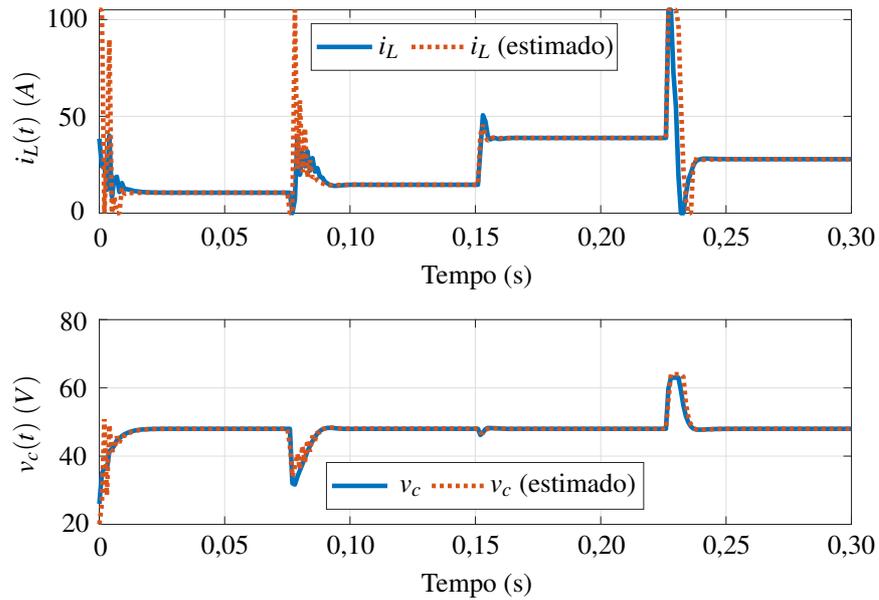
Na Figura 26, é possível verificar o resultado da estabilização da tensão de saída do conversor e o resultado estimado. Como pode ser visto, tanto a saída do conversor como a saída estimada são estabilizadas no regime permanente. Todavia, o resultado estimado apresenta maiores oscilações ao mudar o valor da tensão de entrada.

Figura 26 – Tensão de saída e tensão de saída estimada.



A Figura 27 exibe o comportamento da corrente no indutor e a tensão no capacitor do conversor e o resultado estimado. Nesses casos analisados os sinais são estáveis no regime permanente, mas o resultado da saída do conversor apresenta um comportamento melhor ao ser comparado com a saída do observador, isto é, o resultado estimado, que apresenta maiores oscilações ao mudar o valor da tensão de entrada.

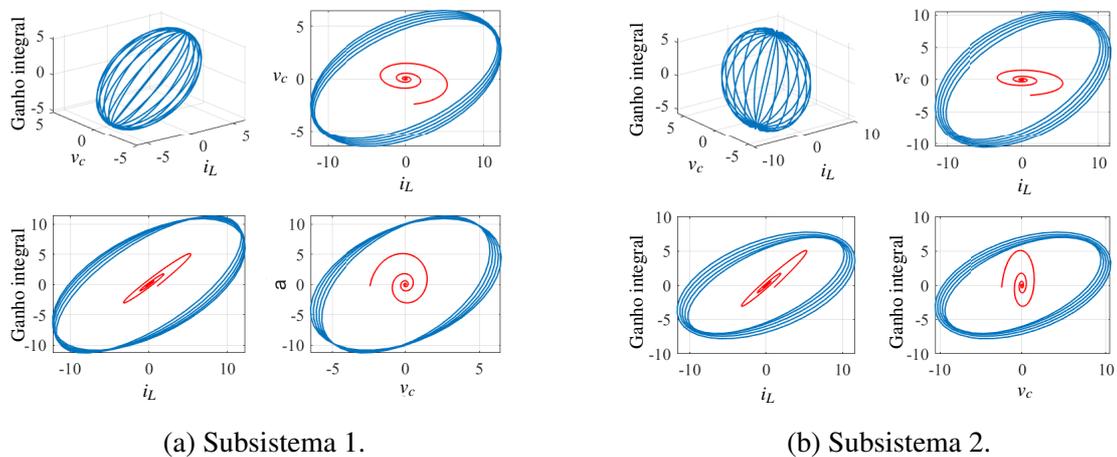
Figura 27 – Corrente no indutor e tensão no capacitor e resultado estimado.



Na Figura 28, são apresentadas as elipsoides 3D e as elipsoides 2D referentes à interação entre as variáveis de estados do conversor *boost* e a ação integral. As elipsoides têm como objetivo verificar a robustez em malha fechada dos subsistemas, além de possibilitarem o armazenamento dos ganhos de realimentação em uma *Lookup Table* (COSTA *et al.*, 2017; WAN; KOTHARE, 2002).

Por meio da Figura 28, verifica-se que o a resposta ao impulso (linha vermelha) permanece dentro das elipsoides conforme tendem à origem, tanto para os estados do sistema como para o estado da ação integral. Logo, confirma-se a robustez da metodologia de controle aplicada para estabilizar o conversor.

Figura 28 – Elipsoides de estabilidade para os subsistemas 1 e 2.



(a) Substistema 1.

(b) Substistema 2.

## 9 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho, foi realizada a síntese de um controlador preditivo robusto baseado em modelo *offline* e *online* via realimentação de saída adotando uma abordagem comutada para sistemas LPV e LTV via LMIs. Além disso, foi proposta a síntese de um atuador Anti-Windup comutado para contornar a eventual saturação do sinal de controle.

O desempenho do método proposto foi comparado com um recente *benchmark* RMPC utilizando um exemplo numérico. Para avaliar a eficiência do método proposto, foi realizada uma análise gráfica e índices de desempenho não intrusivos. Então, foi constatado que o modelo proposto apresenta uma melhor resposta para os estados reais e estimados por meio da análise gráfica e índices de desempenho.

A abordagem proposta aumenta a região de factibilidade para intervalos maiores para os parâmetros variantes, indicando que a região de factibilidade foi ampliada. Assim como no *benchmark*, o atuador AW proposto é útil para evitar o efeito de saturação mesmo com a ação de comutação entre os subsistemas.

Perante os resultados obtidos, foi verificado que as estratégias de controle propostas apresentaram melhores desempenhos do que as estratégias do *benchmark* para o exemplo numérico adotado e para o conversor *boost* CCTE. Portanto, é possível afirmar que a abordagem chaveada se apresenta como uma eficiente técnica de controle com um baixo custo computacional.

Para trabalhos futuros, é possível aplicar o modelo do controle proposto em sistemas elétricos de potência como o modelo de máquina única com barramento infinito. Nesse caso, o desafio é implementar o *Anti-Windup* comutado ao diagrama de controle do sistema elétrico de potência para evitar a instabilidade em situações como quedas de carga ou perturbações na rede para diversos pontos de operação.

Ademais, também é possível aplicar a metodologia proposta a sistemas mecânicos, a exemplo do sistema do pêndulo invertido. Nesse sistema, a aplicação do *Anti-Windup* comutado pode ser utilizado para evitar a saturação do sinal de controle quando há uma grande oscilação ou movimento rápido entre diversos ângulos, impedindo que o controlador continue tentando forçar um movimento maior, o que ajudaria a manter a estabilidade do pêndulo.

Por fim, há a possibilidade de aplicar o controlador experimentalmente na planta do conversor *boost*, a fim de realizar uma análise comparativa entre o resultado obtido nas simulações e o resultado proveniente da prática, em um cenário real com ruídos, limitações dos atuadores e quando o conversor opera próximo às condições críticas

## REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, L. A. **Enciclopédia de automática: controle e automação**. [S.l.]: [S.l.]: Blucher, 2007. (v. 1).
- ALVES, R. T. T. **CONTROLE PREDITIVO DE MODELO ROBUSTO CHAVEADO VIA LMI PARA CONTROLE DE TENSÃO DO CONVERSOR BOOST E SISTEMAS LPV**. 2023. 82 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado)) — Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró - RN, 2023.
- BABAYOMI, O.; ZHANG, Z.; LI, Y.; KENNEL, R. Adaptive predictive control with neuro-fuzzy parameter estimation for microgrid grid-forming converters. **Sustainability**, MDPI AG, v. 13, n. 13, p. 7038, jun. 2021.
- BAKEER, A.; MOHAMED, I. S.; MALIDARREH, P. B.; HATTABI, I.; LIU, L. An artificial neural network-based model predictive control for three-phase flying capacitor multilevel inverter. **IEEE Access**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 10, p. 70305–70316, 2022. ISSN 2169-3536.
- BASCOPE, G.; BARBI, I. Generation of a family of non-isolated dc-dc pwm converters using new three-state switching cells. In: **2000 IEEE 31st Annual Power Electronics Specialists Conference. Conference Proceedings (Cat. No.00CH37018)**. IEEE, 2000. (PESC-00, v. 2), p. 858–863. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/pesc.2000.879927>>.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. New York, NY: Society for Industrial & Applied Mathematics, 1994. (Studies in Applied Mathematics, v. 15).
- CAMACHO, E. F.; BORDONS, C.; CAMACHO, E. F.; BORDONS, C. **Constrained model predictive control**. [S.l.]: Springer, 2007.
- CARVALHO, L. **Controle preditivo robusto via desigualdades matriciais lineares aplicado a sistemas dinâmicos com comutação** 2021. 96 f. Dissertação (Dissertação (Mestrado)) — Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró-RN, 2021.
- CARVALHO, L.; COSTA, M. V.; MACEDO, L. H.; FORTES, E. V. A novel approach for robust model predictive control applied to switched linear systems through state and output feedback. **Journal of the Franklin Institute**, Elsevier BV, v. 360, n. 2, p. 1184–1206, jan. 2023.
- COSTA, M.; REIS, F.; CAMPOS, J.; NOGUEIRA, F.; ALMEIDA, O. Robust mpc-lmi controller applied to three state switching cell boost converter. **Eletrônica de Potência**, Associação Brasileira de Eletronica de Potencia SOBRAEP, v. 22, n. 1, p. 81–90, mar. 2017.
- COSTA, M. V. S. **Controladores Robustos D-LQI e D-Alocação de polos Otimizados via LMI Aplicados a um Conversor Boost Alto Ganho com Célula de Comutação Três Estados** 2012. 122 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado)) — Universidade Federal do Ceará - Centro de Tecnologia, Fortaleza - CE, 2012.
- COSTA, M. V. S. **Controle MPC Robusto Aplicado ao Conversor BOOST CCTE Otimizado por Inequações Matriciais Lineares**. 2017. 179 p. . Dissertação (Tese (Doutorado)) — Universidade Federal do Ceará - Centro de Tecnologia, Fortaleza - CE, Fortaleza-CE, 2017.

- CUZZOLA, F. A.; GEROMEL, J. C.; MORARI, M. An improved approach for constrained robust model predictive control. **Automatica**, Elsevier BV, v. 38, n. 7, p. 1183–1189, jul. 2002.
- DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C. Stability and performance of discrete-time switched linear systems. **Systems & control letters**, Elsevier BV, v. 118, p. 1–7, ago. 2018.
- DORF, R. C.; H., R. **Modern Control Systems**. 8. ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson, 1997. (World student series).
- ESFAHANI, P. S.; PIEPER, J. K. Robust model predictive control for switched linear systems. **ISA Transactions**, Elsevier BV, v. 89, p. 1–11, jun. 2019.
- GAHINET, P.; NEMIROVSKII, A.; LAUB, A.; CHILALI, M. The LMI control toolbox. In: **Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control**. [S.l.]: IEEE, 1994.
- GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. Stability and stabilization of discrete time switched systems. **International Journal of Control**, Informa UK Limited, v. 79, n. 7, p. 719–728, jul. 2006.
- HALL, R. A.; BRIDGEMAN, L. J. Computationally tractable stability criteria for exogenously switched model predictive control. **IEEE Control Systems Letters**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 5, n. 5, p. 1777–1782, nov. 2021. ISSN 2475-1456.
- JUNGERS, R. C. O. M.; PERES, P. L. Mpc for lpv systems with bounded parameter variations. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 84, n. 1, p. 24–36, 2011.
- KIANI, E.; GANJI, B.; TAHER, S. A. Model predictive control of switched reluctance generator based on <sc>z-source converter</sc> for wind power applications. **International Transactions on Electrical Energy Systems**, Hindawi Limited, v. 30, n. 11, ago. 2020. ISSN 2050-7038.
- KIM, T.-H.; LEE, H.-W. Quasi-min-max output-feedback model predictive control for lpv systems with input saturation. **International Journal of Control, Automation and Systems**, Springer Science and Business Media LLC, v. 15, n. 3, p. 1069–1076, maio 2017. ISSN 2005-4092.
- KOTHARE, M. V.; BALAKRISHNAN, V.; MORARI, M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. **Automatica**, Elsevier BV, v. 32, n. 10, p. 1361–1379, out. 1996.
- LESCHER, F.; ZHAO, J. Y.; BORNE, P. Switching lpv controllers for a variable speed pitch regulated wind turbine. In: **The Proceedings of the Multiconference on “Computational Engineering in Systems Applications”**. IEEE, 2006. v. 14, p. 1334–1340. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/CESA.2006.4281844>>.
- LI, D.; XI, Y.; GAO, F. Synthesis of dynamic output feedback rmprc with saturated inputs. **Automatica**, Elsevier BV, v. 49, n. 4, p. 949–954, abr. 2013. ISSN 0005-1098.
- LIBERZON, D. **Switching in systems and control**. [S.l.: s.n.], 2003.
- LIBERZON, D.; MORSE, A. Basic problems in stability and design of switched systems. **IEEE Control Systems**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 19, n. 5, p. 59–70, out. 1999.

- LIU, X.; ZHANG, Z.; YANG, X.; GARCIA, C.; RODRIGUEZ, J. Fixed switching frequency predictive control for pmsm drives with guaranteed control dynamics. In: **2020 IEEE 9th International Power Electronics and Motion Control Conference (IPEMC2020-ECCE Asia)**. [S.l.]: IEEE, 2020. p. 3033–3038.
- LU, B.; WU, F. Switching lpv control designs using multiple parameter-dependent lyapunov functions. **Automatica**, Elsevier BV, v. 40, n. 11, p. 1973–1980, nov. 2004. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.automatica.2004.06.011>>.
- LU, Y.; ARKUN, Y. Quasi-min-max mpc algorithms for lpv systems. **Automatica**, v. 36, n. 4, p. 527–540, 2000. ISSN 0005-1098.
- MOREIRA, T. B. D. S.; COSTA, M. V. S.; NOGUEIRA, F. G. Output feedback t-s fuzzy RMPC applied to 3ssc boost converter. **IEEE Latin America Transactions**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 19, n. 9, p. 1520–1527, set. 2021.
- OGATA, K. **Discrete-Time Control Systems**. London, England: Prentice-Hall, 1986.
- PARK, J.-H.; KIM, T.-H.; SUGIE, T. Output feedback model predictive control for lpv systems based on quasi-min–max algorithm. **Automatica**, v. 47, n. 9, p. 2052–2058, 2011. ISSN 0005-1098.
- POSTMA, M.; NAGAMUNE, R. Air-fuel ratio control of spark ignition engines using a switching lpv controller. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 20, n. 5, p. 1175–1187, set. 2012. ISSN 1558-0865.
- REGO, R. C.; COSTA, M. V. Offline output feedback robust anti-windup MPC-LPV using relaxed LMI optimization. **European Journal of Control**, Elsevier BV, v. 69, p. 100719, jan. 2023.
- REGO, R. C. B. **CONTROLE MPC ROBUSTO COM ANTI-WINDUP APLICADO A SISTEMAS LPV E LTV BASEADO NO ALGORITMO QUASI-MIN-MAX COM RELAXAÇÃO EM LMIS**. 2019. 98 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado)) — Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró - RN, 2019.
- SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. **Multivariable Feedback Control**. 2. ed. Chichester, England: John Wiley & Sons, 2005.
- SLEIMAN, J.-P.; FARSHIDIAN, F.; MINNITI, M. V.; HUTTER, M. A unified mpc framework for whole-body dynamic locomotion and manipulation. **IEEE Robotics and Automation Letters**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 6, n. 3, p. 4688–4695, jul. 2021. ISSN 2377-3774.
- SU, Y.; TAN, K. K. Comments on “output feedback model predictive control for lpv systems based on quasi-min–max algorithm”. **Automatica**, v. 48, n. 9, p. 2385, 2012. ISSN 0005-1098.
- SUN, Z. D.; GE, S. Z. S. **Switched Linear System-Control and Design**. [S.l.]: London: Springer, 2005.
- TURNER, M. C.; HERRMANN, G.; POSTLETHWAITE, I. Discrete-time anti-windup: Part 1 — stability and performance. In: **2003 European Control Conference (ECC)**. [S.l.: s.n.], 2003. p. 473–478.

WADA, N.; SAEKI, M. Anti-windup synthesis for a model predictive control system. **IEEJ Transactions on Electrical and Electronic Engineering**, Wiley, v. 11, n. 6, p. 776–785, ago. 2016. ISSN 1931-4981.

WAN, Z.; KOTHARE, M. V. Robust output feedback model predictive control using off-line linear matrix inequalities. **Journal of Process Control**, Elsevier BV, v. 12, n. 7, p. 763–774, out. 2002.

WAN, Z.; KOTHARE, M. V. An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities. **Automatica**, Elsevier BV, v. 39, n. 5, p. 837–846, maio 2003.

XIE, Y.; WEN, J.; PENG, L. Robust  $H_\infty$  filtering for average dwell time switching systems via a non-monotonic function approach. **Int. J. Control Autom. Syst.**, Springer Science and Business Media LLC, v. 17, n. 3, p. 657–666, mar. 2019.

YANG, W.; FENG, G.; ZHANG, T. Quasi-min-max fuzzy model predictive control of direct methanol fuel cells. **Fuzzy Sets and Systems**, Elsevier BV, v. 248, p. 39–60, ago. 2014.

ZHENG, H.; ZHENG, L.; LI, Y.; WANG, K.; ZHANG, Z.; DING, M. Varying zonotopic tube rmppc with switching logic for lateral path tracking of autonomous vehicle. **Journal of the Franklin Institute**, Elsevier BV, v. 359, n. 7, p. 2759–2787, maio 2022. ISSN 0016-0032.