



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ROSANA CIBELY BATISTA REGO

**CONTROLE MPC ROBUSTO COM *ANTI-WINDUP* APLICADO A SISTEMAS LPV E
LTV BASEADO NO ALGORITMO *QUASI-MIN-MAX* COM RELAXAÇÃO EM LMIS**

MOSSORÓ - RN
2019

ROSANA CIBELY BATISTA REGO

CONTROLE MPC ROBUSTO COM *ANTI-WINDUP* APLICADO A SISTEMAS LPV E LTV BASEADO NO ALGORITMO *QUASI-MIN-MAX* COM RELAXAÇÃO EM LMIS

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, como requisito à obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Sistema de controle e automação.

Orientador: Prof^o. Dr. Marcus Vinicius Silverio Costa - UFERSA

MOSSORÓ - RN

2019

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

R343c Rego, Rosana Cibely Batista.

Controle MPC robusto com anti-widup aplicado a sistemas LPV e LTV baseado no algoritmo quasi-min-max com relaxação em LMIs / Rosana Cibely Batista
Rego. - 2019.
97 f. : il.

Orientador: Marcus Vinicius Silverio Costa.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, 2019.

1. Controle preditivo baseado em modelo. 2. desigualdades lineares matriciais. 3. sistemas lineares com parâmetros variáveis. 4. sistemas lineares variantes no tempo. 5. anti-windup. I. Costa, Marcus Vinicius Silverio, orient. II. Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

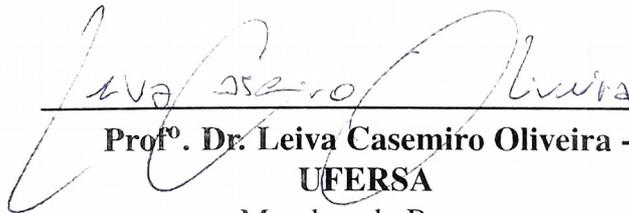
ROSANA CIBELY BATISTA REGO

**CONTROLE MPC ROBUSTO COM ANTI-WINDUP APLICADO A SISTEMAS LPV E
LTV BASEADO NO ALGORITMO QUASI-MIN-MAX COM RELAXAÇÃO EM LMIS**

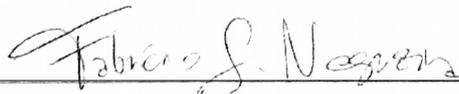
Aprovado em: 16 de 07 de 2019 :



**Prof. Dr. Marcus Vinicius Silverio Costa -
UFERSA**
Orientador



**Prof. Dr. Leiva Casemiro Oliveira -
UFERSA**
Membro da Banca



**Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira -
UFC**
Membro da Banca

MOSSORÓ - RN

2019

"O mais importante a respeito de um problema não é apenas a sua solução, mas a experiência que ganhamos na busca da mesma".

(Autor desconhecido)

RESUMO

Este trabalho propõe uma melhoria para o esquema robusto de controle preditivo baseado modelo (MPC) agrupado com compensador *anti-windup* com restrições para sistemas lineares com parâmetros variáveis (LPV) e sistemas lineares variantes no tempo (LTV) baseados em um algoritmo *quasi-min-max* com relaxamento de desigualdades lineares matriciais (LMI). A abordagem é baseada no uso de várias funções de Lyapunov, cada uma correspondendo a um diferente vértice da modelagem politópica do sistema. A principal vantagem desta nova abordagem em relação a outras técnicas bem conhecidas é a redução da conservatividade. A abordagem envolve um projeto *offline* de um observador de estado robusto para sistemas LPV ou LTV e um algoritmo MPC *online*. Também é proposto a implementação do MPC *offline* com elipsóides invariantes de estabilidade. Para mostrar a eficiência das abordagens, exemplos numéricos para o sistema LPV são usados. E ao final as técnicas propostas são aplicadas a planta LTV do conversor *boost* mostrando assim o bom desempenho do controlador desenvolvido, tanto para sistemas LPV e LTV.

Palavras-chaves: Controle preditivo baseado em modelo, desigualdades lineares matriciais, sistemas lineares com parâmetros variáveis, sistemas lineares variantes no tempo, *anti-windup*.

ABSTRACT

This dissertation proposes a new technique to address constrained robust model predictive control (MPC) scheme combined with anti-windup compensator for linear parameter varying (LPV) and linear time-varying (LTV) systems based on a quasi-min-max algorithm with Linear Matrix Inequalities (LMI) relaxation. The approach is based on the use of several Lyapunov functions with each one corresponding to a different vertex of the polytopic system modeling. The main advantage of this new approach is the reduced conservativeness compared with others well-known control techniques. The approach involves an offline design of a robust state observer for LPV and LTV systems with an online MPC algorithm. Also is proposed an offline MPC algorithm based on stabilizing invariant ellipsoids. A numerical example for a LPV system is used to validate the efficiency of the proposed approach. And in the end, the proposed techniques are applied to the LTV boost converter plant showing the good performance of the developed controller for both LPV and LTV systems.

Keywords: Model predictive control, Linear matrix inequality, linear parameter varying systems, linear time-varying systems, anti-windup.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Produção de trabalhos na área de controle preditivo baseado em modelo nos últimos 5 anos.	13
Figura 2 - Proposta da dissertação.	14
Figura 3 - Proposta de melhoria nas estratégias de controle.	16
Figura 4 - Sistemas de dois tanques.	19
Figura 5 - Variação do parâmetro μ no tempo.	20
Figura 6 - Parâmetros Intrínsecos: a) Variação do parâmetro no plano 3D e b) Variação do parâmetro no plano 2D.	21
Figura 7 - Polítopo com quatro vértices.	24
Figura 8 - Variação dos parâmetros: a) variação de α b) variação de β	26
Figura 9 - Solução de polítopos via LMIs.	29
Figura 10 - Conversor <i>boost</i> com célula de comutação de 3 estados (CCTE).	38
Figura 11 - Modos de operação para o conversor <i>boost</i> CCTE.	39
Figura 12 - Definição dos intervalos de chaveamento do conversor.	42
Figura 13 - Variação dos parâmetros: a) variação de α b) variação de β	60
Figura 14 - Estados do sistema.	61
Figura 15 - Estados do observador do sistema.	61
Figura 16 - Sinal de controle.	62
Figura 17 - Função objetivo.	62
Figura 18 - Análise de polos do sistema LPV para $\alpha \in [1,5]$ e $\beta \in [0.1,1]$: a) polos e seus conjugados para as 3 técnicas simuladas. b) zoom da alocação dos polos e seus conjugados para as 3 técnicas simuladas.	63
Figura 19 - Análise dos polos (x) e seus conjugados (+) do sistema LPV para $\alpha \in [1,17]$ e $\beta \in [0.1,1]$: a) polos e seus conjugados para técnica proposta. b) zoom da alocação dos polos e seus conjugados para técnica proposta.	63
Figura 20 - Sinal na região de saturação.	65
Figura 21 - Diagrama de blocos com AW.	67
Figura 22 - Estados do sistema obtidos com AW.	69
Figura 23 - Sinal de controle do sistema obtidos com AW.	70

Figura 24 - Elipsoides invariantes.	71
Figura 25 - Estados do sistema obtidos na simulação.	75
Figura 26 - Elipsoides de estabilidade da matriz X^{-1}	75
Figura 27 - Relação entre a resposta ao impulso r e as elipsoides $x_1 \times x_2$	76
Figura 28 - Análise dos polos e seus conjugados do sistema LPV para $\alpha \in [1,5]$ e $\beta \in [0.1, 1]$: a) polos e seus conjugados para técnica com r (o) e sem r (+). b) zoom da alocação dos polos e seus conjugados com MPC <i>offline</i>	76
Figura 29 - Condições de tensão de entrada e de potência: a) variação da tensão de entrada. b) variação na potência.	78
Figura 30 - Condições do sinal de controle e carga: a) variação do ciclo de trabalho D_{cycle} . b) variação da carga.	78
Figura 31 - Diagrama de blocos com AW e estimador de estado.	79
Figura 32 - Tensão de saída (V_0) e corrente na saída I_0	83
Figura 33 - Corrente no indutor I_L e sinal de controle $u(k)$	83
Figura 34 - Tensão e corrente estimadas.	84
Figura 35 - Tensão de saída $y(k) = V_0$	86
Figura 36 - Sinal de controle $u(k)$	86
Figura 37 - Corrente na saída I_0	87
Figura 38 - Corrente no indutor I_L	87
Figura 39 - Tensões estimadas no capacitor V_c com o método <i>online</i> e <i>offline</i>	88
Figura 40 - Elipsoides de Estabilidade	89

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
1.1 ESTADO DA ARTE SOBRE O TEMA	12
1.2 PROPOSTA DO TRABALHO	14
1.2.1 Objetivos	16
1.3 RESUMO DOS CAPÍTULOS	16
2 SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES	18
2.1 SISTEMAS LINEARES COM PARÂMETROS VARIÁVEIS (LPV)	18
2.1.1 Aproximação de Sistemas Não-Lineares: Sistemas Quase-LPV	19
2.1.2 Incorporando Componentes Variáveis no Tempo: Parâmetros Intrínsecos	20
2.1.3 Parâmetros Artificiais ou Extrínsecos	21
2.2 REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS LPV	22
2.2.1 Representação LPV-I/O	22
2.2.2 Representação LPV-SS	23
2.2.3 Transformação Linear Fracionária	23
2.2.4 Sistemas LPV politópicos	23
2.3 SISTEMAS LINEARES VARIÁVEIS NO TEMPO (LTV)	25
2.4 REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS LTV	26
2.4.1 Sistemas LTV por polítopo	26
2.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO	27
3 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES (LMI)	28
3.1 LMIS NA TEORIA DE CONTROLE	29
3.2 ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMA LPV	30
3.3 FUNÇÕES LYAPUNOV	32
3.4 ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMA LTV	35
3.5 RELAXAÇÃO DAS LMIS	35
3.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO	37
4 MODELAGEM DO CONVERSOR BOOST	38
4.1 MODELAGEM MATEMÁTICA	38

4.1.1 Representação politópica	43
4.2 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO	45
5 CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO	46
5.1 <i>QUASI-MIN-MAX</i> MPC	46
5.1.1 O Sistema	47
5.1.2 Design robusto do observador	48
5.1.3 Formulação do MPC robusto	49
5.1.3.1 Restrição de entrada	52
5.1.3.2 Condição de robustez	52
5.2 QUASE-MIN-MAX MPC COM RELAXAÇÃO	54
5.2.1 Vantagens em utilizar o procedimento de relaxação	54
5.2.2 Design robusto do observador com relaxação	54
5.2.3 Formulação do MPC com relaxação	56
5.2.3.1 Restrição de entrada com relaxação	57
5.2.3.2 Condição de robustez para o modelo relaxado	58
5.3 EXEMPLO NUMÉRICO	59
5.3.1 Resultados	60
5.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO	64
6 COMPENSADOR ANTI-WINDUP (AW)	65
6.1 MODELAGEM ANTI-WINDUP	66
6.2 MODELAGEM ANTI-WINDUP COM RELAXAÇÃO	68
6.3 EXEMPLO NUMÉRICO	69
6.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO	70
7 CONTROLADOR MPC OFFLINE COM ATUADOR ANTI-WINDUP	71
7.1 CONTROLADOR MPC OFFLINE	71
7.1.1 Algoritmo MPC <i>offline</i> com AW	73
7.2 EXEMPLO NUMÉRICO	74
7.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO	76
8 ANÁLISE E RESULTADOS DE SIMULAÇÃO NUMÉRICA	77
8.1 CONTROLADOR MPC-AW-RELAXADO <i>VERSUS</i> MPC	82

8.2 CONTROLADOR MPC-AW-RELAXADO- <i>ONLINE VERSUS</i> MPC-AW-RELAXADO- <i>OFFLINE</i>	85
8.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO	89
9 CONCLUSÃO	90
9.1 TRABALHOS FUTUROS	91
REFERÊNCIAS	92

1 INTRODUÇÃO

1.1 ESTADO DA ARTE SOBRE O TEMA

A necessidade de controle preciso e eficiente em aplicações industriais atuais está impulsionando o campo de identificação de sistemas para enfrentar o constante desafio de fornecer melhores modelos de fenômenos físicos (TÓTH, 2010). Uma das classes de sistemas que está sendo usada é a classe de sistemas dinâmicos (YAN *et al.*, 2018). Dentre os sistemas dinâmicos lineares tem-se os sistemas lineares variantes no tempo (LTV). Uma grande família de sistemas pode ser modelada utilizando-se a abordagem LTV, como por exemplo a aerodinâmica em alta velocidade de aviões e os coeficientes de difusão em processos químico (LATAIRE, 2011).

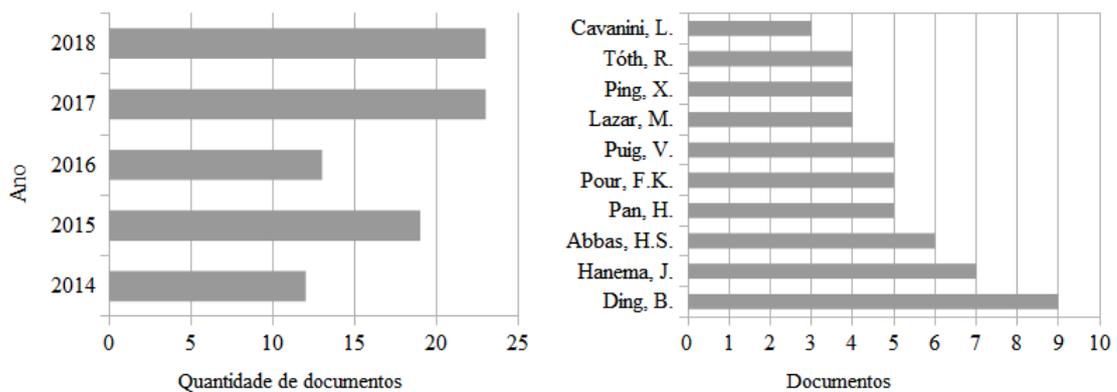
Um outro tipo de sistema dinâmico linear é os sistemas lineares com parâmetros variantes (LPV), esse tipo de sistema esta sendo utilizado devido à capacidade de incorporar não-linearidades do sistema nos parâmetros variáveis. O interesse em sistemas LPV é motivado por seu uso em técnicas de controle de escalonamento de ganhos e pela possibilidade de incorporar sistemas não-lineares na estrutura LPV cobrindo não-linearidades dentro do parâmetro de escalonamento (RUGH; SHAMMA, 2000). É possível também modelar os sistemas LTV em função de parâmetros variantes no tempo, resultando em sistemas lineares de parâmetros variantes (LPV). A vantagem de tal modelagem é a possibilidade de adaptação das técnicas de estabilização projetadas para lidar com sistemas afetados por incertezas politópicas (LATAIRE, 2011; BOURLÈS; MARINESCU, 2011).

Atualmente, o controle preditivo baseado em modelo (MPC) está sendo aplicado a sistemas lineares variantes no tempo ou com parâmetros variantes. Os trabalhos que utilizam o MPC com modelos LPV aumentaram nos últimos anos, conforme Wollnack *et al.* (2017), Ping (2017), Zhao *et al.* (2017), Hanema, Lazar e Tóth (2017), Abbas *et al.* (2017), Longge e Yan (2017), Kim e Lee (2017), He, Sun e Ni (2016), Abbas *et al.* (2016), Yang *et al.* (2016). Em que Wollnack *et al.* (2017), Abbas *et al.* (2017), Abbas *et al.* (2016) apresentar um modelo robusto de controle de projeto MPC entrada-saída LPV sujeito a restrições.

As Figuras 1 (a) e 1 (b) apresentam dados coletados por meio da base de dados do *Scopus* dos trabalhos que utilizam controle preditivo baseado em modelo aplicado a sistemas LPV. Na Figura 1 é possível visualizar que nos anos de 2017 e 2018 foram os anos que tiveram mais documentos produzidos e publicados na área. Evidenciando que esta é uma área recente e atual.

Na Figura 1 (b) tem-se os 10 autores que mais produziram nos últimos 5 anos. Em seu trabalho mais recente Ding, Wang e Hu (2018) propõe um MPC robusto baseado no *feedback* de saída, em que os movimentos de controle do horizonte infinito e os estados estimados são parametrizando em um movimento de controle livre. Já Ping, Li e Al-Ahmari (2017) propõe um MPC baseado no *feedback* de saída para LPV com condições de saturação. Ding *et al.* (2014) propõe uma formulação *offline* do MPC baseado no *feedback* de saída com restrições relaxadas

Figura 1: Produção de trabalhos na área de controle preditivo baseado em modelo nos últimos 5 anos.



(a) Quantidade por ano de trabalhos produzidos nos últimos 5 anos. (b) Autores que mais produziram nos últimos 5 anos.

Fonte: Scopus.

aplicado a sistemas LPV.

Já os trabalhos que utilizam o MPC com modelos LTV pode-se citar, Tanaskovic, Fagiano e Gligorovski (2019) que propõe uma abordagem robusta e adaptativa do MPC para LTV com restrições assintoticamente estáveis, com múltiplas entradas e saídas. Já Costa *et al.* (2017) propõe um MPC com relaxação aplicado a modelagem LTV do conversor *boost*. E Yadbantung e Bumroongsri (2018) apresenta um MPC para sistemas LTV com distúrbios.

Em geral, a utilização de modelos LTV ou LPV é uma maneira de buscar uma representação mais acurada do sistema. Ao considera as incertezas, a dinâmica do modelo aproxima-se mais do sistema real. Dessa forma é interessante projetar controladores capazes de controlar os sistemas com incertezas.

Para outro campo de estudo, Kim e Lee (2017) mostra uma técnica de controle robusto MPC para sistemas LPV modificada com *feedback* de saída baseada no modelo de Su e Tan (2012), Park, Kim e Sugie (2011). Além disso, Longge e Yan (2017) propõe uma nova estratégia *offline* MPC baseado em incerteza politópica que utiliza um conjunto de elipsóides construído usando otimização de desigualdade matricial linear (LMI). Ping (2017) apresenta um parâmetro de escalonamento para a saída de *feedback* MPC-LMI robusto, aplicando uma tabela de consulta *offline* em um modelo de reator contínuo de tanque agitado (CSTR). Já Yang *et al.* (2016) propõem uma abordagem de controle preditivo baseado no *feedback* de saída utilizando um observador para sistemas LPV com perturbações externas limitadas por normas.

Portanto, o MPC-LMI para resolver sistemas lineares dinâmicos/incertos tem sido amplamente estudado na última década. Inicialmente proposto por Kothare, Balakrishnan e Morari (1996) e consolidado por Camacho e Alba (2013), a abordagem robusta do MPC com desigualdades de matriz linear (LMIs) permanece uma técnica de controle interessante devido à vantagem do desempenho robusto garantido, estabilidade assintótica utilizando função de Lyapunov e *tuning* de projeto através das matrizes de ponderação (LU; ARKUN, 2000; WAN; KOTHARE,

2002; WAN; KOTHARE, 2003a; RODRIGUES; ODLOAK, 2005; CAO; LIN, 2005; GAO, 2006; LEE *et al.*, 2007; XIA *et al.*, 2008).

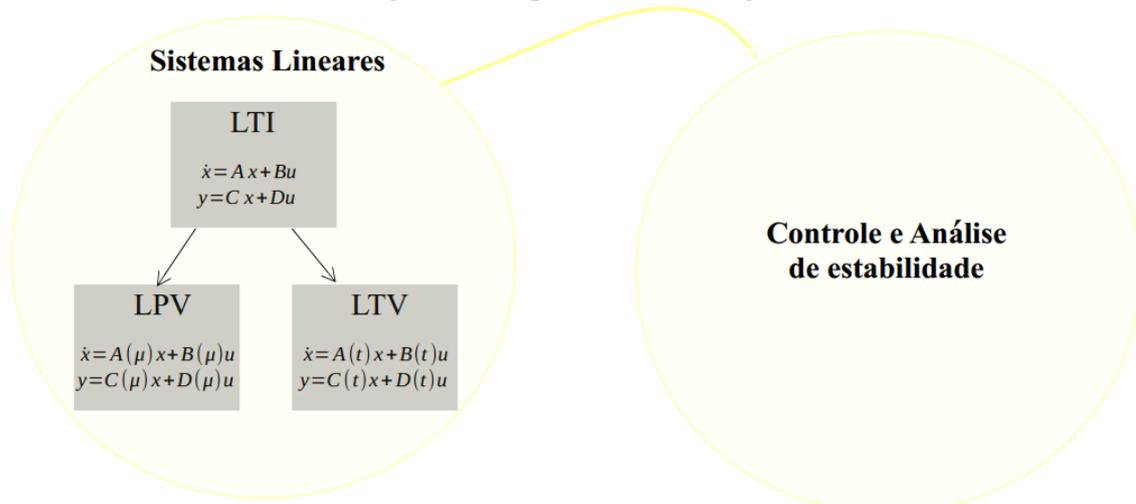
Entretanto, algumas técnicas de MPC baseado em uma abordagem politópica incerta existentes na literatura consideram que o conjunto de soluções será sempre viável (KIM; LEE, 2017; SU; TAN, 2012; PARK; KIM; SUGIE, 2011). Mas esta realidade não é verdade devido ao fato das incertezas presentes no sistema poderem levar a um problema inviável, isto é, a solução pode ficar fora da região politópica e inviabilizar o problema. Mas como poderíamos obter a melhor solução para garantir que o o problema seja viável?

Um procedimento usado para melhorar o problema de viabilidade de restrições é o relaxamento da estabilidade de Lyapunov. Métodos descritos por Cuzzola, Geromel e Morari (2002), Wollnack *et al.* (2017) e Abbas *et al.* (2017) são exemplos usados na literatura. O relaxamento proposto por Cuzzola, Geromel e Morari (2002) consistem em um procedimento que reduz o conservadorismo do polítopo sem perder as propriedades de viabilidade e melhorar o desempenho de estabilidade. Usando este método, é possível projetar um controle preditivo para uma classe mais ampla de sistemas incertos, sejam eles LPV ou LTV (WADA; SAITO; SAEKI, 2006).

Dessa forma, neste trabalho será utilizado um procedimento de relaxação no controlador proposto para sistema baseado em uma abordagem politópica incerta visando reduzir o conservadorismo. A seção seguinte descreve a proposta do trabalho.

1.2 PROPOSTA DO TRABALHO

Figura 2: Proposta da dissertação.



Fonte: Autor.

O foco deste trabalho é propor melhorias nas estratégias de controle com relaxação aplicado a sistemas LPV ou LTV, e realizar a análise de estabilidade baseado nas funções de Lyapunov, assim como ilustrado na Figura 2. Diferente de um sistema LTI (*linear time-invariant*), o LTV possui variáveis que mudam com o tempo. E um sistema LPV possui variáveis que variam seja no tempo ou não. Por isso, os sistemas LTV e LPV aproximam-se mais da dinâmica de um sistema real.

Dessa forma, no trabalho é mostrado que o controle desenvolvido se aplica tanto a sistemas lineares com parâmetros variantes quanto a sistemas lineares variantes no tempo. Já que o sistema LPV com dependência de parâmetros afim pode ser representado por um sistema politópico linear variante no tempo (LTV).

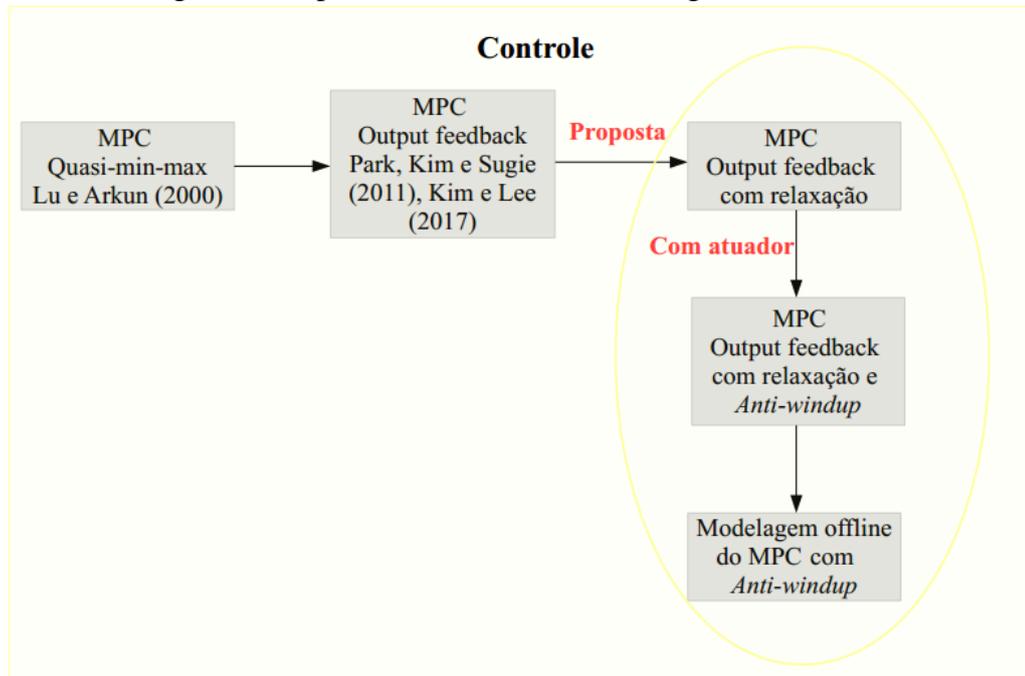
Desse modo, dado um sistema, é realizado a análise de estabilidade e o projeto de controle relaxado. Para isso, com base em procedimentos apresentados em Cuzzola, Geromel e Morari (2002) e Wada, Saito e Saeki (2006), este trabalho propõe uma melhoria da técnica de controle de Park, Kim e Sugie (2011) e Kim e Lee (2017), apresentando um novo procedimento para MPC robusto com restrição e *feedback* de saída com um atuador *anti-windup*. O *anti-windup* implementado é baseado no trabalho de Turner, Herrmann e Postlethwaite (2003), Rego *et al.* (2018), que permite minimizar a degradação do sinal de controle devido as não-linearidades da entrada do sistema.

As técnicas conhecidas como *anti-windup* (AW) foram desenvolvidas para evitar que o sinal de controle entre na região de saturação. Essas técnicas têm sido extensivamente exploradas (RAN; WANG; DONG, 2016; ADEGBEGE; LEVENSON, 2017; WADA; SAEKI, 2016). Doná, Goodwin e Seron (2000) em seu trabalho discute as relação entre a técnica AW e o controle MPC, em que o controle AW considerado no trabalho é baseado na lei de controle de malha fechada com estado saturado aplicado a sistema LTV. Lamrabet, Tissir e Haoussi (2018) propõe um atuador AW para sistemas com atrasos sujeito a saturação incorporando funções de Lyapunov-Krasovskii. Turner, Herrmann e Postlethwaite (2003) propõem um AW formulado em tempo discreto usando uma configuração que efetivamente dissocia partes linear nominal e não-lineares de um sistema de malha fechada com restrições. Assim, neste trabalho será proposto melhorias na técnica proposta por Turner, Herrmann e Postlethwaite (2003) com o procedimento de relaxação na LMI. Esta, será aplicada a sistemas LPV e LTV.

A Figura 3 mostra um fluxograma com as contribuições do presente trabalho. Baseado no controle preditivo proposto por Lu e Arkun (2000), Park, Kim e Sugie (2011), Kim e Lee (2017), este trabalho propõe um controle com relaxação com *anti-windup* e pensando em diminuir o processamento dos cálculos para obtenção do ganho do controlador, é desenvolvido neste trabalho um modelo plenamente *offline* com base nas elipsóides de estabilidades definidas por Wan e Kothare (2003a) para o controlador MPC proposto.

Ainda neste estudo, o controle preditivo robusto (MPC) baseado em uma abordagem politópica incerta é sintetizado para o controle do conversor *boost*. Além disso, também é mostrado que o projeto proposto do MPC robusto também pode ser utilizado em sistemas

Figura 3: Proposta de melhoria nas estratégias de controle.



Fonte: Autor.

lineares de parâmetros variáveis (LPV).

1.2.1 Objetivos

- **Objetivo Geral:**

- O objetivo deste trabalho é propor uma melhoria por meio da relaxação nas desigualdades matriciais na técnica de controle robusto preditivo baseado em modelo com o algoritmo *quasi-min-max*.

- **Objetivos Específicos:**

- Aplicar o procedimento de relaxação nas desigualdades matriciais do controlador;
- Implementar a técnica *anti-windup* para diminuir o efeito da ação integral do controlador no sinal de controle;
- Realizar o controle do conversor *Boost* com a técnica proposta.
- Propor uma formulação *offline* para o MPC descrito.

1.3 RESUMO DOS CAPÍTULOS

O trabalho está organizado da seguinte forma:

- Capítulo 2: É apresentado uma breve revisão dos sistemas lineares com parâmetros variáveis (LPV) e sistemas lineares variáveis no tempo (LTV) bem como a forma de representação desses sistemas.
- Capítulo 3: É introduzido o conceito de desigualdades matriciais lineares (LMI) e como essa ferramenta matemática pode ser utilizada na teoria de controle na análise de estabilidade dos sistemas LPVs e LTVs. Ainda neste capítulo é apresentado o conceito da formulação de relaxação de LMIs.
- Capítulo 4: Apresenta a modelagem matemática do conversor *boost* no tempo e no espaço de estado, bem como sua representação LTV.
- Capítulo 5: Apresenta a modelagem do controle preditivo baseado em modelo (MPC) utilizando o algoritmo *quasi-min-max* proposto por Lu e Arkun (2000), Park, Kim e Sugie (2011), Kim e Lee (2017). E na sessão 5.2 é mostrado a modelagem proposta neste trabalho do MPC com relaxação. Bem como o design do observador robusto com relaxação.
- Capítulo 6: É apresentado o conceito do compensador *anti-windup* bem como a modelagem via desigualdades lineares matriciais (LMI) e o processo de relaxação na LMI.
- Capítulo 7: Apresenta a proposta do controlador MPC *offline* com o compensador *anti-windup* baseado nas elipsóides de estabilidades.
- Capítulo 8: Apresenta os resultados da simulação numérica na planta do conversor *boost* com as técnicas proposta neste trabalho.
- Capítulo 9: Apresenta as considerações finais bem como as propostas de pesquisas a serem desenvolvidas nessa área.

2 SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES

Os sistemas lineares com parâmetros variáveis (*linear parameter-varying* - LPV) e os sistemas lineares variantes no tempo (*linear time-varying* - LTV) pertencem a classe importante de sistemas dinâmicos lineares (BRIAT, 2014).

Um sistema não linear de parâmetros dependentes pode ser definido como,

$$\dot{x} = f(x(t), \mu(t), \dot{\mu}(t), u(t)), \quad (1)$$

em que o parâmetro μ é uma variável endógena, isto é, que depende da dinâmica interna do sistema e que o torna não-linear, seu valor não é conhecido, mas seu valor é medido em tempo real. Se μ é linear no tempo, então o sistema é chamado de sistema linear com parâmetro variante (LPV), e pode ser representado como,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\mu(t))x(t) + B(\mu(t))u(t), \\ y &= C(\mu(t))x(t) + D(\mu(t))u(t), \end{aligned} \quad (2)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ representa o vetor de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o vetor de sinais de controle e $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o vetor de saídas. $A(\mu(t)) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ é a matriz dinâmica dos estados, $B(\mu(t)) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ é a matriz dinâmica das entradas de controle, $C(\mu(t)) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ é a matriz de relação entre estados e saídas e $D(\mu(t)) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ é a matriz de relação entre o sinal de controle e saída.

A descrição matemática depende do parâmetro μ que altera o valor ao longo do tempo. Este parâmetro é geralmente considerado como limitado e tomando valores dentro de um conjunto Δ_μ , muitas vezes assumido como sendo um polígono compacto e convexo (por exemplo, uma caixa) (BRIAT, 2014). Para se obter um modelo LTV (*Linear time-varying*) ou LTI (*Linear time-invariant*) basta escolher uma trajetória $\mu(t) \leftarrow \mu_0(t)$ ou congelar o parâmetros em um dado ponto $\mu(t) \leftarrow \mu_0(t)$.

2.1 SISTEMAS LINEARES COM PARÂMETROS VARIÁVEIS (LPV)

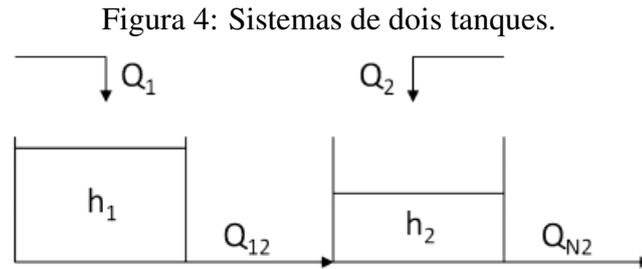
Os sistemas lineares com parâmetros variáveis (LPV) pertencem a classe importante de sistemas dinâmicos lineares que são modelados como sistemas de parâmetros dependentes os quais mudam com o estado (BRIAT, 2014).

Existe alguns tipos de parâmetros em sistemas LPV, e é o tipo de parâmetro que determina o tipo do sistema. Os parâmetros podem, de fato, ser usados para aproximar dinâmicas não-lineares, incorporar parâmetros que variam com o tempo de maneira sistemática, ou mesmo introduzir graus extras de liberdade que podem ser úteis para uma perspectiva de projeto (BRIAT, 2014).

2.1.1 Aproximação de Sistemas Não-Lineares: Sistemas Quase-LPV

Um sistema LPV é considerado Quase-LPV, quando são considerados como aproximações de sistemas não lineares e os parâmetros são funções dos estados do sistema, ou os parâmetros variáveis dependem de sinal exógeno (BRIAT, 2014).

Considere o sistema de dois tanques,



Fonte: Rotondo, Nejari e Puig (2015).

A modelagem matemática do sistema pode ser dada por,

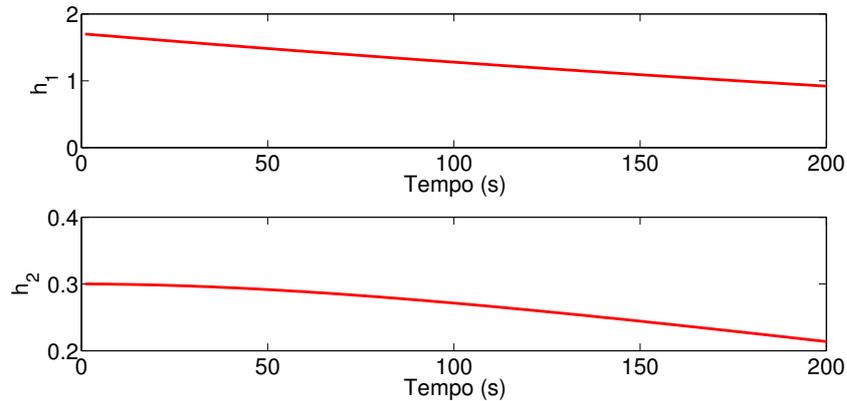
$$\begin{bmatrix} \frac{dh_1}{dt} \\ \frac{dh_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varphi_1(\mu(t)) & 0 \\ \varphi_1(\mu(t)) & -\varphi_2(\mu(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

tal que,

$$\varphi_1(\mu(t)) = \frac{Q_{12}}{Ah_1(t)} = \frac{c_{12}}{A} \frac{\sqrt{h_1(t) - h_2(t)}}{h_1(t)} \quad (4)$$

$$\varphi_2(\mu(t)) = \frac{Q_{N2(t)}}{Ah_2(t)} = \frac{c_2}{A} \frac{\sqrt{h_2(t)}}{h_2(t)}. \quad (5)$$

em que μ é o parâmetro LPV que depende do estado do sistema, isto é, $\mu(t) = [h_1 \ h_2] \in \mathbb{R}$ (Figura 5), dessa forma o sistema é considerado quase-LPV. Entretanto, em geral, uma aproximação LPV não é equivalente (em termos de estabilidade, controlabilidade ou qualquer outra propriedade) ao sistema não linear original. Além disso, uma dificuldade adicional é que sistemas não lineares geralmente admitem várias aproximações ou representações de LPV, e encontrar a mais precisa não é uma tarefa fácil. Outra dificuldade ao lidar com o controle de sistemas quase-LPV obtidos da linearização de um sistema não-linear está na presença de acoplamentos ocultos, que podem levar a instabilidade do sistema em malha fechada, mesmo se o sistema LPV correspondente em malha fechada é estável (BRIAT, 2014), (LAWRENCE; RUGH, 1993), (JAADARI, 2013), (SALA, 2017).

Figura 5: Variação do parâmetro μ no tempo.

Fonte: Autor.

2.1.2 Incorporando Componentes Variáveis no Tempo: Parâmetros Intrínsecos

Os parâmetros podem também ser usados para ocultar ou incorporar componentes que variam no tempo, a fim de usar técnicas de programação de ganho LPV para controlar o sistema original (BRIAT, 2014).

Considere o sistema LTV,

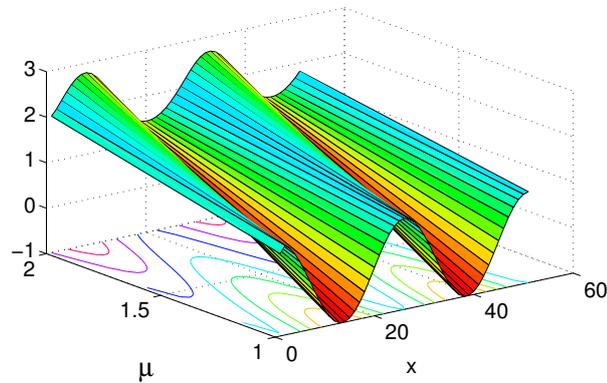
$$\dot{x}(t) = A \cos\left(\frac{\pi}{T}t\right)x(t) \quad (6)$$

fazendo $\mu(t) = \cos\left(\frac{\pi}{T}t\right)$, em que T é o período, o sistema pode ser reescrito como

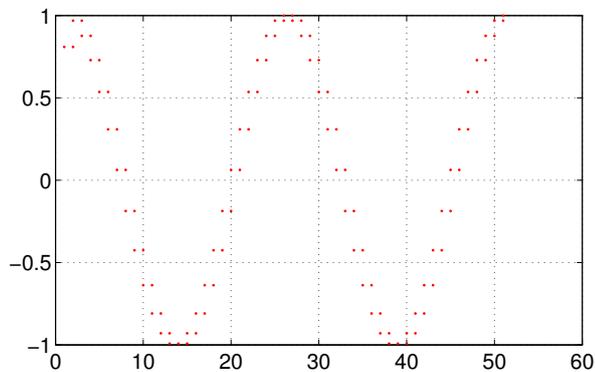
$$\dot{x}(t) = A\mu(t)x(t). \quad (7)$$

Dessa forma, o sistema agora terá um parâmetro que varia no tempo (Figura 6). Na Figura 6 tem-se a variação no tempo do parâmetro μ no plano 3D (x, μ, z) e no plano 2D (x, μ) .

Figura 6: Parâmetros Intrínsecos: a) Variação do parâmetro no plano 3D e b) Variação do parâmetro no plano 2D.



(a) Variação do parâmetro com a resposta do sistema.



(b) Variação do parâmetro.

Fonte: Autor.

2.1.3 Parâmetros Artificiais ou Extrínsecos

Os parâmetros artificiais ou extrínsecos podem ser usados na lei de controle para modelar sua estrutura de acordo com certas restrições ou objetivos.

Considera o sistema SISO LTI,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t) + u(t) \\ y(t) &= x(t),\end{aligned}\tag{8}$$

em que $x \in \mathbb{R}$ é o estado do sistema e $u \in \mathbb{R}$ é o sinal de controle. A ideia é determinar uma lei de controle tal que a saída $y(t)$ segue um sinal de referência $r(t)$, e a largura de banda do sistema em malha fechada pode ser ajustada em tempo real.

A lei de controle é dada por,

$$u(t) = -(1 + \mu(t))x(t) + \mu(t)r(t), \quad \mu(t) > 0,\tag{9}$$

tal que, μ é um parâmetro externo e o sistema de malha fechada pode ser reescrito como,

$$\dot{x}(t) = \mu(t)(r(t) + x(t)). \quad (10)$$

É possível vê que a dinâmica do sistema é assintoticamente estável e que a largura de banda pode ser ajustada em tempo real com $\mu(t)$. E uma resposta mais rápida é obtida com um valor de parâmetro maior (BRIAT, 2014).

2.2 REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS LPV

O modelo LPV (2) tolera uma dependência paramétrica bastante geral, que engloba a maior parte das situações práticas. Esta propriedade requer a utilização e o desenvolvimento de metodologias sofisticadas e complexas de análise e síntese de leis de controle por escalonamento de ganho (ARAÚJO, 2006). Há duas classes mais restritivas de modelos de sistemas LPV obtidas de (2), que são as vezes mais adaptadas a certos métodos específicos de controle LPV.

Uma dessas classes é conhecida como Transformação Linear Fracionária (*Linear Fractional Transformation* - LFT) e a outra como modelos politópicos. No entanto, existe várias outras classes/formas para representar sistemas LPV tais como, a modelagem interpolada, o modelo LPV-I/O (*Input-Output*), LPV-SS (*state-space*) (COX; TÓTH, 2016; BRIAT, 2014; MELO, 2017).

2.2.1 Representação LPV-I/O

A representação do sistema LPV-IO descreve o comportamento da entrada-saída do sistema usando equações polinomiais em termos do operador de deslocamento de tempo. O modelo é geralmente descrito como,

$$y(k) = - \sum_{i=1}^{n_a} a_i(p)q^{-i}y(k) + \sum_{j=0}^{n_b} b_j(p)q^{-j}u(k), \quad (11)$$

em que, os coeficientes a_i e b_j são os parâmetros do modelo, os quais são funções de p , com $n_a \geq 0$ e $n_b \geq 0$ (MELO, 2017).

2.2.2 Representação LPV-SS

Um sistema LPV também pode ser representado no espaço de estado (LPV-SS) representado por,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\mu)x(t) + B(\mu)u(t), \\ y &= C(\mu)x(t) + D(\mu)u(t), \end{aligned} \quad (12)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ representa o vetor de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o vetor de sinais de controle e $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o vetor de saídas. $A(\mu) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B(\mu) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $C(\mu) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ e $D(\mu) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ são as matrizes do sistema com o parâmetro variável μ (BRIAT, 2014; MELO, 2017).

A representação em espaço de estados ainda pode ser modelada na por transformação linear fracionária ou por politopos (BRIAT, 2014).

2.2.3 Transformação Linear Fracionária

Uma dependência LFT do sistema (12) em relação ao parâmetro $\mu(t)$ é definido como,

$$\begin{bmatrix} A(\mu) & B(\mu) \\ C(\mu) & D(\mu) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 & D_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\mu \\ D_{2\mu} \end{bmatrix} \Delta(\mu) (I - D_{\mu\mu} \Delta(\mu))^{-1} \begin{bmatrix} C_\mu & D_{2\mu} \end{bmatrix} \quad (13)$$

em que $\Delta(\mu)$ é uma função matricial linear em μ (ARAÚJO, 2006). E este suposto pertence a um domínio politópico,

$$\mathcal{P}_M \triangleq \text{co}\{M_1, M_2, \dots, M_L\} \quad (14)$$

tal que M_i com $i = 1, 2, \dots, L$ designam os vértices do polítopo \mathcal{P}_M (WHITE; ZHU; CHOI, 2013).

2.2.4 Sistemas LPV politópicos

Uma outra forma de representar o sistema LPV (12) é por meio de modelos politópicos. Gahinet *et al.* (1995) define um polítopo como:

Definição 1 *Um polítopo consiste num conjunto poliedral limitado e é uma casca convexa de um conjunto finito de vértices, sendo que todo elemento no polítopo pode ser gerado pela combinação convexa dos seus vértices.*

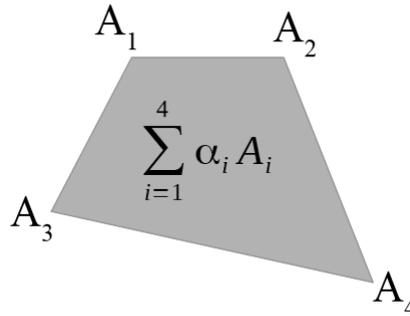
Dessa forma, as matrizes A, B, C, D em (12) pertencem a um cone politópico e são matrizes com uma função de um vetor de parâmetros variantes no tempo $\mu(t)$ que está associado ao ponto de operação atual do sistema.

Escrevendo a matriz $A(\mu)$ da equação (12) na forma politópica, temos

$$A(\mu) = A_0 + \sum_{i=1}^l \alpha_i(\mu) A_i, \quad (15)$$

em que os vértices A_i , $i = 1, \dots, N$ são conhecidos (Figura 7).

Figura 7: Polítopo com quatro vértices.



Fonte: Autor.

O vetor de parâmetro $\alpha_i(k) = [\alpha_1(k) \alpha_2(k) \dots \alpha_l(k)]^T$ é uma função de incertezas que satisfaz a condição,

$$\sum_{i=1}^l \alpha_i(\mu) = 1, \quad \alpha_i(\mu) > 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, l. \quad (16)$$

A variação no tempo de α não é conhecida, entretanto assume-se que podem ser estimados em tempo real.

Dessa forma, o sistema da equação (12) pode ser escrito na forma politópica como,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \alpha_{ij}(\mu) \begin{bmatrix} A(\mu) & B(\mu) \\ C(\mu) & D(\mu) \end{bmatrix}_{ij} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, \quad (17)$$

onde

$$\begin{bmatrix} A(\mu) & B(\mu) \\ C(\mu) & D(\mu) \end{bmatrix}_{ij} = \begin{bmatrix} A_{ij0} & B_{ij0} \\ C_{ij0} & D_{ij0} \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^n \mu_{ijk} \begin{bmatrix} A_{ijk} & B_{ijk} \\ C_{ijk} & D_{ijk} \end{bmatrix}.$$

Associado aos sistemas LPVs, existem basicamente duas abordagens principais de análise e design: Teoria de sistemas robustos lineares e teoria de sistemas dissipativos usando várias funções de Lyapunov dependentes de parâmetros (PDFS) (LIM, 1999).

Segundo Lim (1999) a estrutura do sistema dissipativo formula de forma atraente os problemas de análise e síntese, estes são problemas de otimização convexa envolvendo desigualdades matriciais lineares (*linear matrix inequalities* - LMIs), as quais podem ser resolvidas de forma eficiente por computador, estas serão discutidas no capítulo 3.

2.3 SISTEMAS LINEARES VARIÁVEIS NO TEMPO (LTV)

Seja o sistema dinâmico não linear,

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), w(t), t) \quad (18)$$

em que $x(t)$ é denominado estado, $u(t)$ uma entrada exógena, $w(t)$ um ruído de processo, t o tempo. Se a função f é linear, então o sistema é dito linear variante no tempo (*linear time-varying* - LTV), e pode ser escrito como,

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + w(t), \quad (19)$$

em que $A(t) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ é a matriz variante dos estados e $B(t) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ é a matriz variante das entradas de controle (BOURLÈS; MARINESCU, 2011).

Exemplo 1 *Considere o sistema,*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 - 5\cos(t)\text{sen}(t) & -5\cos^2(t) + 1 \\ 5\text{sen}^2(t) - 1 & -1 + 5\cos(t)\text{sen}(t) \end{bmatrix} x(t) \quad (20)$$

fazendo $A(t) = \begin{bmatrix} -1 - 5\cos(t)\text{sen}(t) & -5\cos^2(t) + 1 \\ 5\text{sen}^2(t) - 1 & -1 + 5\cos(t)\text{sen}(t) \end{bmatrix}$, em que t é o tempo, o sistema pode ser reescrito como

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t). \quad (21)$$

Dessa forma, o sistema varia a cada instante de tempo, sendo classificado, portanto, como um LTV.

Assim, um sistema que varia no tempo pode ser considerado como um sistema, em que as propriedades dinâmicas estão mudando com o tempo. Ao contrário dos sistemas LPV, a causa da dependência de tempo não é necessariamente diretamente mensurável. A variação do tempo pode ser simplesmente devido a uma evolução de algumas propriedades do sistema.

A distinção entre um LTV e um sistema LPV pode, no entanto, ser vaga. Por exemplo, a corrosão por pite em evolução pode ser chamada de variação de parâmetro, onde o parâmetro de escalonamento seria o progresso da reação eletroquímica, ou a concentração de um (ou mais) reagentes particulares. Ambiguidade adicional pode surgir observando que, um sistema LPV também pode ser tratado como sendo LTV. Este é o caso quando uma determinada trajetória para o parâmetro de escalonamento dependente do tempo é escolhida (LATAIRE, 2011).

2.4 REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS LTV

O modelo LTV (19) possui uma dependência temporal que engloba algumas situações praticas, tais como, aerodinâmica de aeronaves de alta velocidade e coeficientes de difusão em processos químicos (LEE; CHOI, 2005). Assim como visto para os sistemas LPV, os sistemas LTV também podem ser representado como modelo politópicos.

2.4.1 Sistemas LTV por polítopo

O sistema (20) pode ser escrito na forma politópica como,

$$A(t) = A_0 + \sum_{i=1}^l \alpha_i(t)A_i, \quad (22)$$

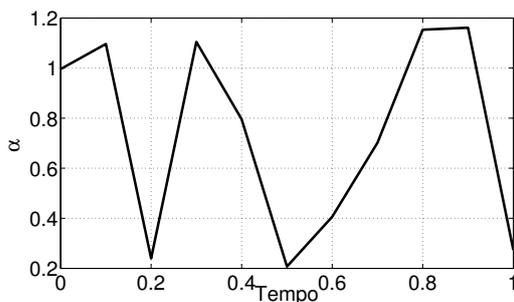
em que os vértices A_i , $i = 1, \dots, N$ são conhecidos. Veja que diferente da representação LPV politópica (15), o parâmetro α agora varia com o tempo e não mais em função de outro parâmetro. No exemplo 2 tem-se a modelagem de um reator CSTR não isotérmico, em que as matrizes variam a cada instante de tempo.

Exemplo 2 (WAN; KOTHARE, 2002) *CSTR não isotérmico: O sistema é modelado pela equação,*

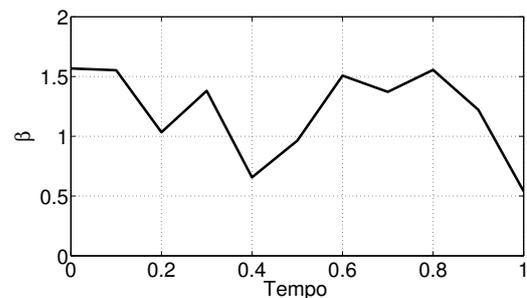
$$\begin{bmatrix} C_A(k+1) \\ T(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.85 - 0.0986\alpha(k) & -0.0014\alpha(k) \\ 0.9864\alpha(k)\beta(k) & 0.0487 + 0.01403\alpha(k)\beta(k) \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.15 & 0 \\ 0 & -0.912 \end{bmatrix} u(k). \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k). \quad (23)$$

Considerando que os parâmetros variam no tempo discreto com a trajetória mostrada na Figura 8.

Figura 8: Variação dos parâmetros: a) variação de α b) variação de β .



(a) Trajetória para α para o sistema do exemplo 2.



(b) Trajetória para β para o sistema do exemplo 2.

Fonte: Autor.

O sistema pertenceria ao seguinte polítopo,

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0.8401 & -0.0001 \\ 0.0493 & 0.0494 \end{bmatrix} & A_2 &= \begin{bmatrix} 0.8401 & -0.0001 \\ 0.1085 & 0.0502 \end{bmatrix} \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} 0.7415 & -0.0015 \\ 0.5425 & 0.0564 \end{bmatrix} & A_4 &= \begin{bmatrix} 0.7415 & -0.0015 \\ 1.1935 & 0.0657 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{24}$$

2.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO

Este capítulo apresentou toda a revisão bibliográfica a respeito de sistemas lineares com parâmetros variáveis e sistemas lineares variáveis no tempo, bem como os principais tipos de parâmetros em sistemas LPV. Além disso, foi apresentada duas formas de representação de sistemas LPV: a por transformação linear fracionária e a representação por polítopos, esta última será a representação utilizada no decorrer do trabalho tanto para os sistemas LPV quanto para os sistemas LTV.

3 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES (LMI)

A desigualdade matricial linear (LMI) é uma técnica bastante utilizada na teoria de controle para resolver problemas relacionados à análise de estabilidade e projeto de controladores para sistemas não lineares (JAADARI, 2013).

Uma LMI pode ser definida por,

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0, \quad (25)$$

onde $x \in \mathbb{R}^m$ é uma variável, e $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, \dots, m$ são conhecidos. $F(x)$ é matriz definida positiva, isto é, $u^T F(x) u > 0$ para todo $u \neq 0$ e $u \in \mathbb{R}^n$. Uma LMI é um conjunto de n desigualdades polinomiais em x . E multiplas LMIs podem ser expressadas com uma única LMI,

$$\begin{bmatrix} F_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & F_n(x) \end{bmatrix} > 0. \quad (26)$$

Quando as matrizes $F_i(x)$ são diagonais, a LMI $F(x) > 0$ é apenas um conjunto de desigualdades lineares. Desigualdades não linear (convex) são convertidas para LMI através do complemento Schur.

Definição 2 Complemento de Schur: Seja $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz definida positiva, $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma matriz completa e $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$, as duas desigualdades abaixo são equivalentes:

1. $Q(x) - S(x)P(x)^{-1}S(x)^T > 0, P(x) > 0$
2. $\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & P(x) \end{bmatrix} > 0$

Isto é, uma desigualdade não linear pode ser representada por uma LMI.

Segundo Lim (1999) um problema LMI pode ser dividido em três categorias:

- Problema de Factibilidade: Consiste em encontrar uma solução x tal que

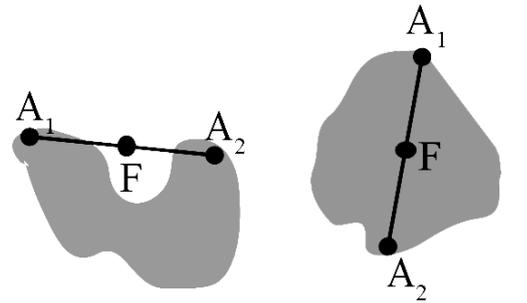
$$F(x) > 0.$$

Uma solução é factível quando ela encontra-se dentro da região delimitada pelo polítopo (Figura 9 b), caso contrário a solução é dita não factível (Figura 9 a).

- Problema de minimização de uma função objetivo linear: Consiste em encontrar uma solução x tal que

$$\min_x f(x)$$

Figura 9: Solução de polítopos via LMIs.



(a) Solução não factível. (b) Solução factível

Fonte: Adaptado de Costa (2017).

$$\text{sujeito à } \begin{cases} F(x) > 0 \\ G(x) = 0 \end{cases} \quad (27)$$

- Problema de minimização de autovalores generalizados: Consiste em encontrar a solução x de modo que,

$$\min \lambda \text{ sujeito à } \begin{cases} A(x) < \lambda B(x) \\ B(x) > 0 \\ C(x) < 0 \end{cases} \quad (28)$$

em que $f(x)$, $F(x)$, $G(x)$, $A(x)$, $B(x)$ e $C(x)$ são funções afins em x .

3.1 LMIS NA TEORIA DE CONTROLE

A utilização de desigualdades matriciais lineares na literatura para lidar com sistemas incertos é em geral baseada no conceito de estabilidade quadrática sobre toda a região de incerteza (MAZONI, 2008). As LMIs são bastante utilizadas para análise de estabilidade de sistemas incertos ou LPV e LTV (LIM, 1999).

As LMIs aplicadas a problemas de controle, tenta-se aplicar uma transformação de variáveis à desigualdade matricial que envolve as matrizes com as quais se projeta o controlador em uma desigualdade que seja linear em suas variáveis matrizes (MAZONI, 2008).

O método computacional utilizado para o projeto de controladores normalmente utilizar algoritmos de programação semi-definida, que lida com a solução de problemas *mini-max* do tipo,

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } a^T x \\ &\text{sujeito a } F(x) > 0 \end{aligned}$$

em que $a^T x$ representa o objetivo linear e $F(x) > 0$, a inequação matricial.

Existem soluções analíticas para vários problemas de LMI de forma especial, muitas vezes com importantes interpretações teóricas de sistema e controle. Aqui será discutido a utilização de LMIs para análise de estabilidade dos sistemas LPV e LTV.

3.2 ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMA LPV

A análise de sistemas de LPV baseia-se principalmente em abordagens de análise de estabilidade robusta, uma vez que um sistema de LPV é nada mais que um sistema incerto com parâmetros variáveis no tempo (BRIAT, 2014).

Existem vários conceitos de estabilidade de sistemas de LPVs, oriundos dos conceitos de estabilidade ao longo de trajetórias fixadas, isto é, constantes (estabilidade "congelada") ou estabilidade ao longo da variação arbitrária \mathbf{p} (estabilidade global). O primeiro aspecto define estabilidade no sentido de sistemas LTI obtidos pelo congelamento dos parâmetros, este último estabelece este conceito no comportamento do sistema LPV completo. (TÓTH, 2010).

O teorema a seguir que estabelece as condições para um sistema LPV ser globalmente estável, foi definido por Desoer e Vidyasagar (1975).

Teorema 1 (DESOER; VIDYASAGAR, 1975) *O sistema LPV*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\mu(t))x(t) + B(\mu(t))u(t), \\ y &= C(\mu(t))x(t) + D(\mu(t))u(t), \quad \forall \mu \in \mathcal{P}_M, \end{aligned}$$

é globalmente estável se as condições seguintes são válidas:

- $\Re(\lambda_i(\Lambda(\mu))) < 0, i = 1, \dots, n, \forall \mu \in \mathcal{P}_M,$
- $\exists \varepsilon > 0$ *suficientemente pequeno tal que* $\|\frac{d\mu(t)}{dt}\| < \varepsilon, \forall t \geq 0, \forall \mu \in \mathcal{P}_M.$

Dessa forma o teorema diz que se a variação do parâmetro for suficientemente lenta a estabilidade do sistema LTI implica na estabilidade do sistema LPV. Entretanto na prática é necessário determinar o valor de ε que é o que caracteriza a velocidade dessa variação. Dessa forma do ponto de vista prático não se costuma definir a estabilidade de um sistema LPV pela estabilidade LTI. É necessário a utilização de uma teoria mais abrangente, como a teoria de estabilidade de Lyapunov (KHALIL, 1996). Aqui serão abordados alguns pontos principais de estabilidade baseada na teoria de Lyapunov.

Seja o sistema autônomo,

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq t_0 \tag{29}$$

$$x(t_0) = x_0$$

Considerando que $x_0 = 0$ seja o ponto de equilíbrio para o sistema (29).

Definição 3 (*Estabilidade Assintótica Uniforme Global*). A trajetória de equilíbrio $x \equiv 0$ é uniformemente assintoticamente estável se satisfaz as condições

- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon)$ tal que $t \geq t_0 \geq 0, \|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon$
- $\exists \alpha > 0 \forall \|x(t_0)\| < \alpha, x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, sendo que $\forall \varepsilon > 0, \exists T(\alpha) \forall t > t_0 + T, \|x(t)\| < \varepsilon$.

Teorema 2 (*DESOER; VIDYASAGAR, 1975*) O sistema (29) é globalmente assintoticamente estável se existe a função de Lyapunov $V(t, x)$ definida sobre $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ com valores em \mathbb{R} , tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e todo t positivo

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|), \quad (30)$$

$$\dot{V}(t, x) \leq -\alpha_3(\|x\|), \quad (31)$$

em que α_1, α_2 e α_3 são funções definidas sobre \mathbb{R}_+ com valores em \mathbb{R}_+ , contínuas, estritamente crescentes, não limitadas e nulas na origem.

A função de Lyapunov pode ser vista como uma medida generalizada da energia do sistema. Dessa forma o sistema será estável se a energia do sistema for decrescente ao longo de todas as trajetórias desse sistema (KHALIL, 1996).

Teorema 3 (*GAHINET et al., 1995*) Dado um sistema incerto com n vértices,

$$\dot{x} = A(\delta)x \quad \text{em que } A(\delta) = A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i(\delta)A_i \quad (32)$$

o sistema incerto é quadraticamente estável se, somente se para sistemas de tempo discreto existe uma matriz $P = P^T \geq 0, A^T P A - P \leq 0, \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ou $A_j^T P A_j - P \leq 0, \forall j = 1, 2, \dots, n$.

O exemplo 3 explanar a utilização dos Teorema 2 e 3.

Exemplo 3 Considere o sistema LPV,

$$\dot{x} = A(\delta)x, \quad A(\delta) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3\delta \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Estamos interessados em analisar a estabilidade do sistema, considerando que a incerteza (δ) seja descrita na forma politópica, para tal considere que $\delta \in \{\delta_{min}, \delta_{max}\}$. Para verificar a estabilidade do sistema temos que testar a condição de Lyapunov vista no Teorema 2 e 3 para todos os valores de $\delta \in \{\delta_{min}, \delta_{max}\}$, isto é, encontrar uma matriz positiva definida P tal que,

$$\forall \delta \in \{\delta_{min}, \delta_{max}\} : A(\delta)^T P + P A(\delta) < 0 \quad (34)$$

Este é um problema de dimensão infinita, de difícil solução. Mas como $A(\delta)$ aparece na forma linear na inequação de Lyapunov, pode-se pela propriedade de convexidade testar a condição acima apenas para os vértices da região $\{\delta_{min}, \delta_{max}\}$, isto é, se existe uma matriz $P > 0$ tal que

$$\begin{aligned} A(\delta_{min})^T P + PA(\delta_{min}) &< 0 \\ A(\delta_{max})^T P + PA(\delta_{max}) &< 0 \end{aligned} \quad (35)$$

ou ainda podemos escrever na forma como definido no teorema 3,

$$A_j^T P A_j - A_j \leq 0. \quad (36)$$

Seja Q uma matriz simétrica, e positiva tal que $P = Q^{-1}$. Substituindo P em (36) tem-se,

$$A_j^T Q^{-1} A_j - Q^{-1} \leq 0, \quad (37)$$

multiplicando (37) por $-Q$,

$$Q - Q A_j^T Q^{-1} A_j Q \geq 0. \quad (38)$$

Aplicando o complemento de Schur,

$$\begin{bmatrix} Q & Q A_j^T \\ A_j Q & Q \end{bmatrix} \geq 0. \quad (39)$$

que consiste na desigualdade de Lyapunov por LMI, e caso exista a matriz Q garantimos que para toda região o sistema será estável.

3.3 FUNÇÕES LYAPUNOV

Várias funções de Lyapunov são geralmente propostas para resolver o problema de estabilidade (AGUIRRE *et al.*, 2007). Aqui será discutido três tipos dessas funções.

a) Função Lyapunov Polinomial

As funções polinomiais de Lyapunov são utilizadas para análise de estabilidade para sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy polinomiais (JAADARI, 2013).

As funções polinomiais de Lyapunov pode ser descritas como,

$$V(x(t)) = \bar{x}(x(t))^T P(x(t)) \bar{x}(x(t)), \quad (40)$$

em que $P(x(t))$ é uma matriz polinomial simétrica em $x(t)$, $\bar{x}(x(t))$ é um vetor coluna cujas entradas são todos monômios de $x(t)$.

b) **Função Lyapunov não quadrática fuzzy**

As funções não quadráticas fuzzy são geralmente dada por,

$$V(x(t)) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t))x(t)^T P_i x(t), \quad (41)$$

em que P_i é uma matriz definida positiva e $h_i(x(t)) \geq 0$, $\sum_{i=1}^r h_i(x(t)) = 1$.

Esta função permite relaxar as restrições impostas pela abordagem quadrática (JAADARI, 2013). De fato, encontrar uma matriz de Lyapunov para cada modelo local é mais fácil do que encontrar uma matriz comum de Lyapunov para todos os modelos locais. Para encontrar as matrizes P_i , um procedimento de otimização convexa foi proposto por Johansson, Rantzer e Arzen (1999).

c) **Função Lyapunov Quadrática**

A função de Lyapunov quadrática é definida por,

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t), \quad P \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad P = P^T > 0. \quad (42)$$

A existência de uma função quadrática de Lyapunov é apenas suficiente para a estabilidade assintótica como descrito na **Definição 1**. Considerando o sistema (29) como um sistema LPV,

$$\dot{x} = A(\mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq t_0. \quad (43)$$

Para analisar a estabilidade do sistema, será utilizado a função de Lyapunov $V(\mu, x)$ quadrática

$$V(\mu, x) = x^T P(\mu)x, \quad (44)$$

tal que $P(\mu)$ é simétrica. A derivada de $V(\mu, x)$ é dada por,

$$\dot{V}(\mu, x) = \frac{\partial V}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt}. \quad (45)$$

Para que V seja uma função de Lyapunov e o sistema seja estável, ela deve satisfazer

$$\begin{cases} V(\mu, x) > 0, & \dot{V}(\mu, x) < 0, & x \neq 0 \\ V(\mu, 0) = 0, & \dot{V}(\mu, 0) = 0, & x = 0. \end{cases} \quad (46)$$

Dessa forma se $P(\mu)$ é positiva definida,

$$P(\mu) = P(\mu)^T > 0, \quad \forall \mu \in \mathcal{P}_M \quad (47)$$

então a primeira condição é satisfeita. A segunda condição é satisfeita quando

$$\frac{\partial P(\mu)}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dt} + P(\mu)A(\mu) + A^T(\mu)P(\mu) < 0, \quad \forall \mu \in \mathcal{P}_M. \quad (48)$$

Dessa forma se é possível determinar uma matriz $P(\mu)$ positiva definida, de modo que a inequação matricial (LMI) (48) seja satisfeita, então $V(\mu, x)$ será uma função de Lyapunov e o sistema (43) será estável.

Para sistemas LTI a matriz P é constante, de modo que a análise de estabilidade se reduz a LMI,

$$PA + A^T P < 0, \quad (49)$$

tal que $P = P^T > 0$.

Exemplo 4 *Seja o sistema LTI $\dot{x} = Ax$ com*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Este sistema é estável pois os autovalores da matriz A são $\{-1, -1\}$. Mas devemos encontrar uma solução $P > 0$ para $PA + A^T P < 0$. Por simplicidade definimos uma matriz $Q > 0$ e fazemos $Q = -(PA + A^T P)$. Dessa forma temos que solucionar $PA + A^T P + Q = 0$. A escolha de $Q > 0$ é arbitrária. Escolhendo $Q = I$ temos

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (50)$$

temos, portanto, o sistema

$$\begin{cases} -2P_2 + 1 = 0 \\ -P_3 + P_1 - 2P_2 = 0 \\ 2P_2 - 4P_3 + 1 = 0 \end{cases} \quad (51)$$

cuja solução é, $P_2 = 0.5$, $P_3 = 0.5$, $P_1 = 1.5$ e dessa forma a matriz P é dada por,

$$P = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$\det(P) 1.5 \times 0.5 - 0.5^2 > 0.$$

Logo $P > 0$, pois seus menores principais são positivos, e portanto o sistema é globalmente estável.

O teorema de Lyapunov pode ser usado se escolhermos $Q \geq 0$ ao invés de $Q > 0$, a demonstração para isso encontra-se em Trofino, Coutinho e Barbosa (2003).

3.4 ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMA LTV

O problema de estabilidade do sistema LTV, assim como apresentado para o sistema LPV, pode ser abordado através da função Lyapunov apresentada na seção 3.3.

Para tanto, considere a função Lyapunov quadrática no domínio do tempo discreto

$$V(x(k)) = x(k)^T P x(k) \quad (53)$$

em que o ponto de equilíbrio do modelo é satisfeito se $V(x(k+1)) \leq 0$.

Aplicando a equação (53) em (20) tem-se,

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) = x(k)^T (A_j^T P A_j - P) x(k) \quad (54)$$

A Definição 3 também se aplica para sistemas LTV, dessa forma, para garantir o ponto de equilíbrio, $x(k) \equiv 0$, é necessário que (54) seja menor que zero. Logo,

$$A_j^T P A_j - P \leq 0. \quad (55)$$

Portanto o conceito de estabilidade de Lyapunov pode ser descrito pelo seguinte teorema:

Teorema 4 *Dado um sistema,*

$$x(k+1) = A(k)x(k), \quad (56)$$

existe uma solução $P = P^T > 0$, tal que, a restrição $A^T P A - P \leq 0$ seja satisfeita $\forall x \neq 0$.

3.5 RELAXAÇÃO DAS LMIS

Segundo Cuzzola, Geromel e Morari (2002) a relaxação da LMI é uma forma de diminuir o conservadorismo de uma determinada modelagem. Costa (2017) define que um critério é conservador quando atende a uma determinada modelagem bem condicionada, normalizada à uma referência base. No entanto para sistemas mal condicionados, essas restrições conservadoras de LMIs podem não atender às condições de factibilidade.

Cuzzola, Geromel e Morari (2002) propõe um procedimento denominado "relaxação" que consiste em contornar condições conservadoras de otimização para sistemas mau condicionados mostrando que esse procedimento aumenta os intervalos de operação até o ponto de ruptura

do modelo LMI tradicional. O procedimento torna o conjunto de soluções mais “elástico” em relação aos critérios LMIs mais tradicionais (COSTA, 2017).

O relaxamento consiste em aumentar a região da solução modelo e torná-la viável, reduzindo o conservadorismo e melhorando o desempenho do controlador. Existe diversos procedimentos de relaxação. Pode-se citar Sala e Arino (2008) que apresenta a relaxação da LMI para controle fuzzy na forma de restrições polinomiais. Claeys, Daafouz e Henrion (2016) apresenta relaxação de LMIs para sistemas não lineares chaveados.

O critério de relaxação utilizado nas LMIs deste trabalho utiliza variáveis de folga e matrizes de folga não simétricas como proposto em Cuzzola, Geromel e Morari (2002), Costa (2012).

Considerando o sistema (33) definido no Exemplo 1, deseja-se aplicar uma relaxação na LMI (39). Para isso considere uma matriz X de relaxação compatível não-simétrica e semidefinida positiva tal que, $X + X^T \geq 0$. Considerando também uma matriz $Q_j = Q_j^T \geq 0$, em que $Q_j^{-1} \geq 0$ aplicado em um sistema mal condicionado (33), o qual é factível em pelo menos um vértice do polítopo, mas não lhe é garantida a factibilidade aos demais vértices do polítopo.

Multiplicando Q_j^{-1} por $(X - Q_j)$ á direita e $(X - Q_j)^T$ à esquerda, tem-se

$$(X - Q_j)^T Q_j^{-1} (X - Q_j) \geq 0, \quad (57)$$

considerando,

$$X \geq Q_j \Rightarrow X - Q_j \geq 0, \quad (58)$$

tem-se,

$$X^T Q_j^{-1} X \geq X + X^T - Q_j. \quad (59)$$

Esta desigualdade é a condição que garante a convergência e linearidade no sistema com restrição LMI com relaxação (COSTA, 2017).

Dessa forma aplicando a relaxação na desigualdade matricial (37), tem-se que

$$X^T Q_j^{-1} X - X^T A_j^T Q_j^{-1} A_j X \leq 0. \quad (60)$$

Aplicando o complemento de Schur em (60), segue que

$$\begin{bmatrix} X^T Q_j^{-1} X & (A_j X)^T \\ A_j X & Q_j \end{bmatrix} \geq 0, \quad (61)$$

aplicando (59) em (61),

$$\begin{bmatrix} X + X^T - Q_j & (A_j X)^T \\ A_j X & Q_j \end{bmatrix} \geq 0. \quad (62)$$

Portanto a LMI (62) garante a relaxação e a factibilidade.

3.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO

Este capítulo apresentou a análise de estabilidade utilizando funções de Lyapunov para sistemas LPV e LTV, além de uma pequena introdução a desigualdades matriciais lineares (LMIs) aplicada na teoria de controle. A LMI é a ferramenta matemática que será utilizada na modelagem do controle proposto neste trabalho. Ainda neste capítulo, foi discutido o processo de relaxação das LMIs, este processo será aplicado na LMI do controlador visando obter melhores resultados no controle do sistema LPV ou LTV.

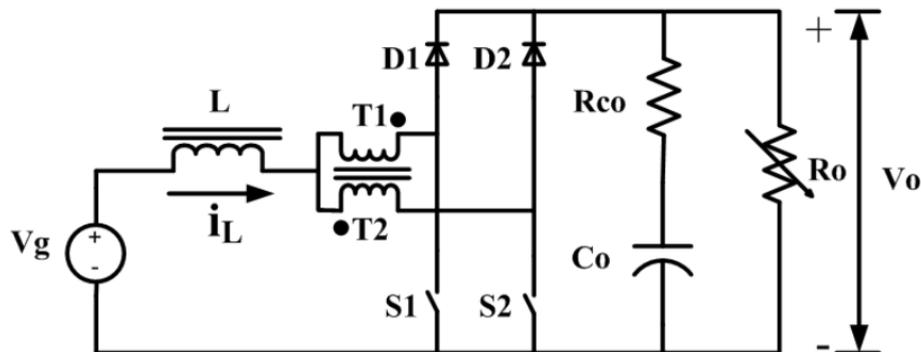
4 MODELAGEM DO CONVERSOR BOOST

Os conversores DC-DC são bastante utilizados nos sistemas de fornecimento de energia, eles são considerados a maneira mais eficiente de implementar atuadores para sistemas eletromecânicos, principalmente nas estruturas de eletrônica de potência (OLALLA *et al.*, 2012). O objetivo dos conversores DC-DC é fornecer uma saída de tensão DC mesmo quando sujeito a carga ou variações de tensão de entrada (GULDEMIR, 2011).

Um dos conversores DC-DC de interesse, principalmente na área de eletrônica de potência são os conversores *boost* (COSTA *et al.*, 2017). Um conversor DC-DC *boost* tem a capacidade de elevar uma dada tensão DC. Ele possui uma topologia simplificada, porém apresenta algumas singularidades em sua modelagem, tais como as variações de resistência de carga, tensão de entrada e os efeitos da fase não mínima como apresentado em (LINARES-FLORES *et al.*, 2014), (ORTEGA *et al.*, 2013), (CHENG *et al.*, 2017).

O conversor utilizado neste trabalho é do tipo *Boost* DC-DC com célula de comutação em três estados.

Figura 10: Conversor *boost* com célula de comutação de 3 estados (CCTE).



Fonte: Bascopé e Barbi (2000), Costa (2012).

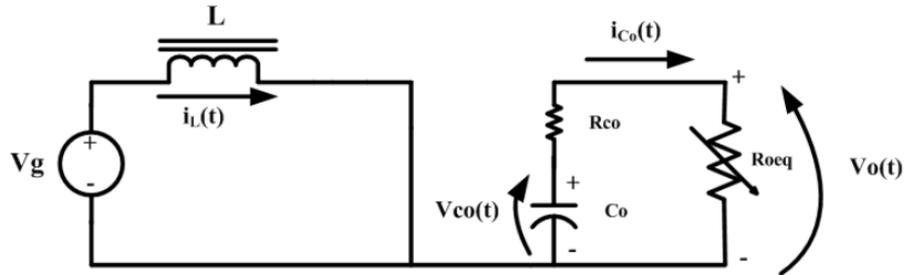
O conversor exibido na Figura 10 possui quatro pontos de operação (BASCOPE; BARBI, 2000). Cada ponto de operação no conversor possui um intervalo de tempo, em que as chaves operam em agrupamentos distintos ON (condução) e OFF (bloqueado) (COSTA, 2017).

4.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

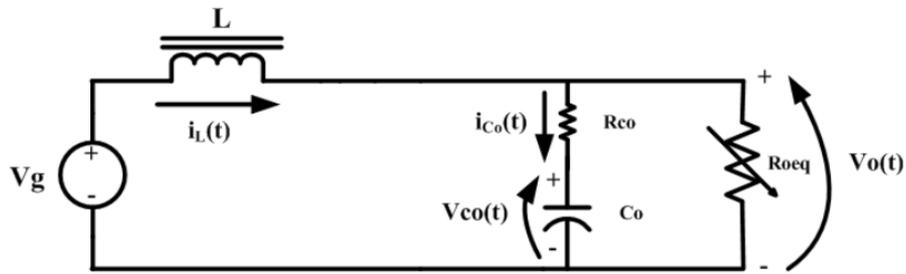
A modelagem realizada aqui é a mesma proposta na tese Costa (2017) que é uma expansão do método da modelagem no espaço de estado médio (*Space-state Averaging*) proposta em Middlebrook e Cuk (1976) para sistemas LTV definido por Kothare, Balakrishnan e Morari (1996). Em que para uma tensão de entrada $V_g(t)$ e para a resistência de carga $R_o(t) = f(P(t))$, sendo esta variável variante em função da potência demandada.

Separando circuito do *boost* da Figura 10 no momento de operação de S_1 e S_2 tem-se respectivamente os circuitos apresentados na Figura 11 (a) e (b).

Figura 11: Modos de operação para o conversor *boost* CCTE.



(a) Modos de operação S_1



(b) Modos de operação S_2

Fonte: Costa (2017).

Aplicando a Lei de Kirchoff no circuito da Figura 11 (a), considerando que há energia armazenada no capacitor C_o tem-se as expressões para taxa de variação da tensão no capacitor,

$$V_{Co}(t) + (R_{Co} + R_o)C_o \frac{dV_{Co}(t)}{dt} = 0, \quad (63)$$

colocando o termo derivativo em evidência,

$$\frac{dV_{Co}(t)}{dt} = -\frac{V_{Co}(t)}{(R_{Co} + R_o)C_o}. \quad (64)$$

E a taxa de variação da corrente no indutor,

$$V_g(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}, \quad (65)$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{V_g(t)}{L}. \quad (66)$$

Dessa forma a tensão V_o é dada por,

$$V_o(t) = \frac{R_o(t)}{(R_{Co} + R_o(t))C_o} V_{Co}(t). \quad (67)$$

Escrevendo as equações (64), (66) e (67) no modelo espaço de estado tem-se,

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L(t) \\ \dot{V}_{C_o}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{(R_{C_o}+R_o)C_o} \end{bmatrix}}_{A_1} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ V_{C_o}(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_1}, \quad (68)$$

$$V_o(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{R_o}{(R_{C_o}+R_o)} \end{bmatrix}}_{C_1}, \quad (69)$$

em que A_1 , B_1 e C_1 são as matrizes no espaço de estado em tempo contínuo do circuito (a).

Aplicando a Lei de Kirchoff agora no circuito da Figura 11 (b), isto é, quando S_2 esta operando, tem-se que a tensão $V_g(t)$ é dada por,

$$V_g(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} + V_o(t), \quad (70)$$

mas $V_o(t)$ é dada por,

$$V_o(t) = R_{C_o}C_o \frac{dV_{C_o}(t)}{dt} + V_{C_o}(t), \quad (71)$$

dessa forma $V_g(t)$ pode ser escrito como,

$$V_g(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} + R_{C_o}C_o \frac{dV_{C_o}(t)}{dt} + V_{C_o}(t). \quad (72)$$

A corrente no indutor é dada por,

$$i_L(t) = C_o \frac{dV_{C_o}(t)}{dt} + \frac{V_o(t)}{R_o(t)}. \quad (73)$$

Substituindo (72) em (73) obtem-se,

$$i_L(t) = C_o \frac{dV_{C_o}(t)}{dt} \frac{R_o(t) + R_{C_o}}{R_o(t)} + \frac{1}{R_o(t)} V_{C_o}(t). \quad (74)$$

Colocando o termo diferencial em evidência, tem-se a taxa de variação da tensão no capacitor,

$$\frac{dV_{C_o}(t)}{dt} = \frac{R_o(t)}{R_o(t) + R_{C_o}} i_L(t) - \frac{1}{(R_o(t) + R_{C_o})C_o} V_{C_o}(t). \quad (75)$$

Substituindo (75) em (71) e em (72), tem-se a taxa de variação da corrente no indutor,

$$\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R_o(t) \parallel R_{C_o}}{L} i_L(t) - \frac{R_o(t)}{L(R_o(t) + R_{C_o})} V_{C_o}(t) + \frac{V_g}{L}, \quad (76)$$

e a tensão $V_o(t)$,

$$V_o(t) = R_o(t) \parallel R_{C_o} i_L(t) + \frac{R_o(t)}{L(R_o(t) + R_{C_o})} V_{C_o}(t). \quad (77)$$

Escrevendo as equações (75), (76) e (77) no modelo espaço de estado tem-se,

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L(t) \\ \dot{V}_{C_o}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{R_{C_o} \parallel R_o}{L} & -\frac{R_{C_o}}{(R_{C_o} + R_o)L} \\ -\frac{R_o}{(R_{C_o} + R_o)C_o} & -\frac{1}{(R_{C_o} + R_o)C_o} \end{bmatrix}}_{A_2} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ V_{C_o}(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_2}, \quad (78)$$

$$V_o(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{C_o} \parallel R_o & \frac{R_o}{(R_{C_o} + R_o)} \end{bmatrix}}_{C_2}, \quad (79)$$

em que A_2 , B_2 e C_2 são as matrizes no espaço de estado em tempo contínuo do circuito (b).

Conhecendo a modelagem para S_1 e S_2 obtém-se a modelagem geral do conversor. Dessa forma o modelo no espaço de estado do *boost* pode ser dado por,

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= (A_1(t)\bar{x} + V_g(t))\zeta + (A_2(t)\bar{x} + B_2V_g(t))(1 - \zeta), \\ V_o(t) &= (C_1(t)\bar{x} + D_1V_g(t))\zeta + (C_1(t)\bar{x} + D_1V_g(t))(1 - \zeta), B \end{aligned} \quad (80)$$

em que ζ é o ciclo de trabalho real do conversor.

Separando os componentes CC e CA e rescrevendo a equação (80) tem-se,

$$\begin{aligned} \dot{X} + \dot{x} &= \bar{A}(t)X + \bar{B}(t)V_g(t) + \bar{A}(t)x + ((A_1(t) - A_2(t))X + (B_1(t) - B_2(t))V_g(t))u, \\ V_{occ} + y &= \bar{C}(t)X + \bar{D}(t)V_g(t) + \bar{C}(t)x + ((C_1(t) - C_2(t))X + (D_1(t) - D_2(t))V_g(t))u \end{aligned} \quad (81)$$

em que, $\bar{x} = X + x$, $V_o = V_{occ} + y$ e $\zeta = D_{cycle} + u$, onde X é o vetor de estados dos valores CC, V_{occ} é a tensão de saída em regime e D_{cycle} é o ciclo de trabalho em regime. As variáveis x , u , e y são os sinais pequenos respectivamente o vetor de estado, o sinal de controle e a tensão de saída. As matrizes \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} e \bar{D} são definidas respectivamente por,

$$\bar{A} = A_1(t)D_{cycle} + A_2(t)(1 - D_{cycle}), \quad (82)$$

$$\bar{B} = B_1(t)D_{cycle} + B_2(t)(1 - D_{cycle}), \quad (83)$$

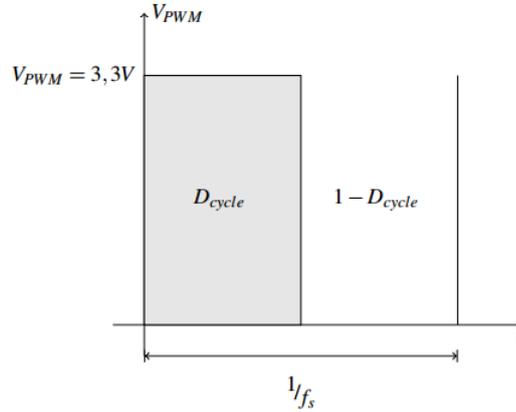
$$\bar{C} = C_1(t)D_{cycle} + C_2(t)(1 - D_{cycle}), \quad (84)$$

$$\bar{D} = D_1(t)D_{cycle} + D_2(t)(1 - D_{cycle}), \quad (85)$$

em que D_{cycle} e seu complemento $1 - D_{cycle}$ são os dois pontos de operação do conversor *boost*. O estado operando em D_{cycle} consiste no trabalho das chaves S_1 e seu complemento S_2 . O princípio de chaveamento é considerando o modo de condução contínua (MCC) (Figura 101).

A equação (81) apresenta a formulação em regime permanente e a formulação em pequenos sinais proposta por Middlebrook e Cuk (1976). Dessa forma, separando os termos da equação (81) de pequenos e grandes sinais e rescrevendo os termos, tem-se,

Figura 12: Definição dos intervalos de chaveamento do conversor.



Fonte: Middlebrook e Cuk (1976).

$$\dot{X} = \bar{A}(t)X + \bar{B}(t)V_g(t) = 0, \quad (86)$$

$$X = \bar{A}(t)^{-1}\bar{B}(t)V_g(t). \quad (87)$$

$$V_{occ} = \bar{C}(t)X + \bar{D}(t)V_g(t) = 0, \quad (88)$$

$$V_{occ} = \bar{C}(t)^{-1}\bar{D}(t)V_g(t). \quad (89)$$

E as expressões para pequenos sinais no espaço de estados médios apresentado por Middlebrook e Cuk (1976) é dada por,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_t(t)x + B_t(t)u, \\ y &= C_t(t)x + D_t(t)u, \end{aligned} \quad (90)$$

$x = [i_L \quad V_c]^T$, onde i_L é a corrente no indutor, V_c é a tensão no capacitor, u é o sinal de controle e $y = V_o$ é a tensão de saída. As matrizes A_t , B_t , C_t e D_t são as matrizes no espaço de estados médio variante no tempo e são definidas como segue,

$$A_t = A_1(t)D_{cycle} + A_2(t)(1 - D_{cycle}), \quad (91)$$

$$B_t = (A_1(t) - A_2(t))X + (B_1(t) - B_2(t))V_g \quad (92)$$

$$C_t = C_1(t)D_{cycle} + C_2(t)(1 - D_{cycle}), \quad (93)$$

$$D_t = (C_1(t) - C_2(t))X, \quad (94)$$

em que os parâmetros de regime permanente são dados por,

$$X = \frac{V_g}{R'} \begin{bmatrix} 1 \\ (1 - D_{cycle})R_o(t) \end{bmatrix}, \quad (95)$$

$$Y = \frac{V_g(t)(1 - D_{cycle})R_o(t)}{R'}, \quad (96)$$

em que $R' = (1 - D_{cycle})^2 R_o + D_{cycle}(1 - D_{cycle})(R_{co} \parallel R_o)$. Dessa forma as matrizes do modelo para pequenos sinais no espaço de estados médios considerando o modo de condução contínua do converso *boost*, podem se escritas como,

$$A_t = \begin{bmatrix} -\frac{(1-D_{cycle})(R_{co} \parallel R_o)}{L} & -\frac{(1-D_{cycle})R_o}{L(R_{co}+R_o)} \\ \frac{(1-D_{cycle})R_o}{C_o(R_{co}+R_o)} & -\frac{1}{C_o(R_{co}+R_o)} \end{bmatrix}, \quad (97)$$

$$B_t = \frac{V_g}{R} \begin{bmatrix} \frac{R_o}{L} \frac{(1-D_{cycle})R_o+R_{co}}{R_o+R_{co}} \\ -\frac{R_o}{R_o+R_{co}} \end{bmatrix}, \quad (98)$$

$$C_t = \left[(1 - D_{cycle})(R_{co} \parallel R_o) \quad \frac{R_o}{R_{co}+R_o} \right], \quad (99)$$

$$D_t = -V_g \frac{R_{co} \parallel R_o}{R'}. \quad (100)$$

4.1.1 Representação politópica

Analisando as matrizes (97), (98), (99) e (100) vê-se que o modelo é diretamente influenciado pelas variações dos parâmetros da tensão de entrada V_g e da carga R_o , já que a variação da tensão de entrada muda o ciclo de trabalho (D_{cycle}) em regime permanente e a variação da carga influencia na resistência de carga. Dessa forma se o ciclo de trabalho é uma função da tensão de entrada e a carga é uma função da potência, o sistema (90) passa a ser LTV e pode ser escrito como,

$$D_{cycle} = f(V_g) = 1 - \frac{V_g}{V_o}, \quad V_g \in [V_{gmin}, V_{gmax}], \quad (101)$$

e carga

$$R_o = f(Pot) = \frac{V_o^2}{Pot}, \quad Pot \in [Pot_{min}, Pot_{max}]. \quad (102)$$

Logo considerando as equações (101) e (102), o sistema (90) pertence ao seguinte polítopo formado pelos quatro modelos locais,

$$- f(V_{gmax}, Pot_{max})$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{bmatrix} -\frac{(\frac{V_{gmax}}{V_o})(R_{co} \parallel \frac{V_o^2}{Pot_{max}})}{L} & -\frac{(\frac{V_{gmax}}{V_o}) \frac{V_o^2}{Pot_{max}}}{L(R_{co} + \frac{V_o^2}{Pot_{max}})} \\ \frac{(\frac{V_{gmax}}{V_o}) \frac{V_o^2}{Pot_{max}}}{C_o(R_{co} + \frac{V_o^2}{Pot_{max}})} & -\frac{1}{C_o(R_{co} + \frac{V_o^2}{Pot_{max}})} \end{bmatrix}, B_1 = \frac{V_{gmax}}{R} \begin{bmatrix} \frac{V_o^2}{Pot_{max}} \frac{(\frac{V_{gmax}}{V_o}) \frac{V_o^2}{Pot_{max}} + R_{co}}{L} \\ \frac{V_o^2}{Pot_{max}} + R_{co} \\ -\frac{V_o^2}{R_o + R_{co}} \end{bmatrix}, \\
C_1 &= \begin{bmatrix} (\frac{V_{gmax}}{V_o})(R_{co} \parallel \frac{V_o^2}{Pot_{max}}) & \frac{V_o^2}{R_{co} + \frac{V_o^2}{Pot_{max}}} \end{bmatrix}, D_1 = -V_{gmax} \frac{R_{co} \parallel \frac{V_o^2}{Pot_{max}}}{R'_1},
\end{aligned} \tag{103}$$

em que $R'_1 = (\frac{V_{gmax}}{V_o})^2 \frac{V_o^2}{Pot_{max}} + (1 - \frac{V_{gmax}}{V_o})(\frac{V_{gmax}}{V_o})(R_{co} \parallel \frac{V_o^2}{Pot_{max}})$.

- $f(V_{gmin}, Pot_{max})$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \begin{bmatrix} -\frac{(\frac{V_{gmin}}{V_o})(R_{co} \parallel \frac{V_o^2}{Pot_{max}})}{L} & -\frac{(\frac{V_{gmin}}{V_o}) \frac{V_o^2}{Pot_{max}}}{L(R_{co} + \frac{V_o^2}{Pot_{max}})} \\ \frac{(\frac{V_{gmin}}{V_o}) \frac{V_o^2}{Pot_{max}}}{C_o(R_{co} + \frac{V_o^2}{Pot_{max}})} & -\frac{1}{C_o(R_{co} + \frac{V_o^2}{Pot_{max}})} \end{bmatrix}, B_2 = \frac{V_{gmin}}{R} \begin{bmatrix} \frac{V_o^2}{Pot_{max}} \frac{(\frac{V_{gmin}}{V_o}) \frac{V_o^2}{Pot_{max}} + R_{co}}{L} \\ \frac{V_o^2}{Pot_{max}} + R_{co} \\ -\frac{V_o^2}{R_o + R_{co}} \end{bmatrix}, \\
C_2 &= \begin{bmatrix} (\frac{V_{gmin}}{V_o})(R_{co} \parallel \frac{V_o^2}{Pot_{max}}) & \frac{V_o^2}{R_{co} + \frac{V_o^2}{Pot_{max}}} \end{bmatrix}, D_2 = -V_{gmin} \frac{R_{co} \parallel \frac{V_o^2}{Pot_{max}}}{R'_2},
\end{aligned} \tag{104}$$

em que $R'_2 = (\frac{V_{gmin}}{V_o})^2 \frac{V_o^2}{Pot_{max}} + (1 - \frac{V_{gmin}}{V_o})(\frac{V_{gmin}}{V_o})(R_{co} \parallel \frac{V_o^2}{Pot_{max}})$.

- $f(V_{gmax}, Pot_{min})$

$$\begin{aligned}
A_3 &= \begin{bmatrix} -\frac{(\frac{V_{gmax}}{V_o})(R_{co} \parallel \frac{V_o^2}{Pot_{min}})}{L} & -\frac{(\frac{V_{gmax}}{V_o}) \frac{V_o^2}{Pot_{min}}}{L(R_{co} + \frac{V_o^2}{Pot_{min}})} \\ \frac{(\frac{V_{gmax}}{V_o}) \frac{V_o^2}{Pot_{min}}}{C_o(R_{co} + \frac{V_o^2}{Pot_{min}})} & -\frac{1}{C_o(R_{co} + \frac{V_o^2}{Pot_{min}})} \end{bmatrix}, B_3 = \frac{V_{gmax}}{R} \begin{bmatrix} \frac{V_o^2}{Pot_{min}} \frac{(\frac{V_{gmax}}{V_o}) \frac{V_o^2}{Pot_{min}} + R_{co}}{L} \\ \frac{V_o^2}{Pot_{min}} + R_{co} \\ -\frac{V_o^2}{R_o + R_{co}} \end{bmatrix}, \\
C_3 &= \begin{bmatrix} (\frac{V_{gmax}}{V_o})(R_{co} \parallel \frac{V_o^2}{Pot_{min}}) & \frac{V_o^2}{R_{co} + \frac{V_o^2}{Pot_{min}}} \end{bmatrix}, D_3 = -V_{gmax} \frac{R_{co} \parallel \frac{V_o^2}{Pot_{min}}}{R'_3},
\end{aligned} \tag{105}$$

em que $R'_3 = (\frac{V_{gmax}}{V_o})^2 \frac{V_o^2}{Pot_{min}} + (1 - \frac{V_{gmax}}{V_o})(\frac{V_{gmax}}{V_o})(R_{co} \parallel \frac{V_o^2}{Pot_{min}})$.

- $f(V_{gmin}, Pot_{min})$

$$\begin{aligned}
A_4 &= \begin{bmatrix} -\frac{(\frac{V_{gmin}}{V_o})(R_{co} \parallel \frac{V_o^2}{Pot_{min}})}{L} & -\frac{(\frac{V_{gmin}}{V_o}) \frac{V_o^2}{Pot_{min}}}{L(R_{co} + \frac{V_o^2}{Pot_{min}})} \\ \frac{(\frac{V_{gmin}}{V_o}) \frac{V_o^2}{Pot_{min}}}{C_o(R_{co} + \frac{V_o^2}{Pot_{min}})} & -\frac{1}{C_o(R_{co} + \frac{V_o^2}{Pot_{min}})} \end{bmatrix}, B_4 = \frac{V_{gmin}}{R} \begin{bmatrix} \frac{V_o^2}{Pot_{min}} \frac{(\frac{V_{gmin}}{V_o}) \frac{V_o^2}{Pot_{min}} + R_{co}}{L} \\ \frac{V_o^2}{Pot_{min}} + R_{co} \\ -\frac{V_o^2}{R_o + R_{co}} \end{bmatrix}, \\
C_4 &= \begin{bmatrix} (\frac{V_{gmin}}{V_o})(R_{co} \parallel \frac{V_o^2}{Pot_{min}}) & \frac{V_o^2}{R_{co} + \frac{V_o^2}{Pot_{min}}} \end{bmatrix}, D_4 = -V_{gmin} \frac{R_{co} \parallel \frac{V_o^2}{Pot_{min}}}{R'_4},
\end{aligned} \tag{106}$$

em que $R'_4 = (\frac{V_{gmin}}{V_o})^2 \frac{V_o^2}{Pot_{min}} + (1 - \frac{V_{gmin}}{V_o})(\frac{V_{gmin}}{V_o})(R_{co} \parallel \frac{V_o^2}{Pot_{min}})$.

Um modelo no tempo discreto pode ser obtido usando a aproximação de Euler com um tempo de amostra T_s para permitir uma implementação digital da planta:

$$\begin{bmatrix} I_L(k+1) \\ V_c(k+1) \end{bmatrix} = (I + T_s A_i) \begin{bmatrix} I_L(k) \\ V_c(k) \end{bmatrix} + T_s B_i u(k), \quad (107)$$

$$V_{out} = C_i + D_i u(k)$$

em que I_L é a corrente no indutor e V_c é a tensão no capacitor. A_i , B_i , C_i e D_i são os vértices pertencentes ao polítopo.

4.2 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO

Neste capítulo foi apresentado a modelagem matemática do conversor *boost* CCTE, em que foi mostrado o princípio de chaveamento e modos de operação. Foi apresentado a modelagem LTV politópica do conversor *boost* através da representação clássica LTI utilizando os conceitos de polítopos e incertezas. Por meio da modelagem será possível analisar a garantia da estabilidade robusta em qualquer ponto de operação do conversor. Esta modelagem será utilizada com a técnica de controle proposta no trabalho.

5 CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO

Neste capítulo será introduzido o método de controle preditivo baseado em modelo (MPC), também será apresentado o método baseado no algoritmo *quasi-min-max* proposto inicialmente por Lu e Arkun (2000) baseado na técnica do *output feedback* apresentada por Park, Kim e Sugie (2011), Kim e Lee (2017). E por fim, uma melhoria da técnica citada é apresentada.

5.1 QUASI-MIN-MAX MPC

O controle preditivo baseado em modelo (MPC) é considerado a maneira mais geral de colocar o problema de controle de processo no domínio do tempo. O controle preditivo baseado em modelo mostrou ser um tipo de controle bastante robusto na maioria das aplicações, as provas de estabilidade e robustez foram difíceis de obter devido ao horizonte finito usado. (CAMACHO; ALBA, 2013).

O verdadeiro nascimento do MPC ocorreu na indústria em meados dos anos 70. Apresentado no trabalho controle preditivo baseado em modelo heurístico (MHRC) de Testud *et al.* (1978) e por Cutler e Ramaker (1980) que propôs a técnica controle por matriz dinâmica (*Dynamic Matrix Control - DMC*), a estratégia do MPC tornou-se popular na indústria petroquímica. Durante este período, houve uma enxurrada de novas variantes do MPC, de modo que o MPC não é apenas uma estratégia de controle específica, mas sim um conjunto de métodos de controle (LÖFBERG, 2003), (CAMACHO; ALBA, 2013). O controle preditivo por matriz dinâmica (DMC) é uma técnica baseada na resposta degrau do modelo e na minimização do erro predito em um número finito de instantes de amostragem futuras (KWONG, 2005).

O controlador GPC (*Generalized Predictive Control*) consiste no controlador preditivo de horizonte recente (*Recending Horizon*) com N passos a frente limitado a N_u passos de controle. O modelo de GPC é baseado no modelo CARIMA (*Controlled Auto Regressive Integrated with Moving Average*) (CAMACHO; ALBA, 2013).

O controlador RMPC ou MPC robusto explorar o conhecimento sobre a incertezas do modelo. O conhecimento típico pode ser limitado em parâmetros incertos no sistema, como o peso de um braço robótico ou limites de perturbações externas, como a carga no braço do robô (LÖFBERG, 2003).

Enquanto os controladores clássicos tais como da classe DMC e GPC são indicados apenas para sistemas lineares e invariantes no tempo (*Linear time-invariant - LTIs*) (KWONG, 2005). Os controladores MPC robustos apresentam melhor desempenho para controle de sistemas do tipo variante no tempo (LTV) e LPV além de garantir a estabilidade (ZHANG; FENG; ZENG, 2009), (ZHANG *et al.*, 2008).

O MPC para sistemas lineares incertos tem sido amplamente estudado nas últimas década. Foi proposto com base no conceito de conjuntos invariantes elipsoidais (KOTHARE;

BALAKRISHNAN; MORARI, 1996). No entanto, não foi explicitamente desenvolvido para sistemas LPV. Muitos resultados na literatura representam extensões de Kothare, Balakrishnan e Morari (1996). Usando funções Lyapunov dependentes de parâmetros para o sistema LPV, podemos citar Lu e Arkun (2000), Cuzzola, Geromel e Morari (2002), Wan e Kothare (2002), Wan e Kothare (2003a), Löfberg (2003), Mao (2003), Rodrigues e Odloak (2005), Lee *et al.* (2007), Park, Kim e Sugie (2011), Yu *et al.* (2012), Shamma (2012), Ding *et al.* (2014), Abbas *et al.* (2016), Ping (2017), Kim e Lee (2017).

A técnica *quasi-min-max* para sistemas LPV ou LTV consistem em minimizar uma função objetivo tal que,

$$\begin{aligned} \min_u \sum_{j=0}^{N-1} y(k+j|k)\Psi y(k+j|k)^T + u(k+j|k)^T R u(k+j|k) \\ \text{sujeito á,} \\ u(k+j|k) \in \mathbb{U} \\ x(k+j|k) \in \mathbb{X} \end{aligned} \quad (108)$$

em que x é o vetor de estados, u é o vetor do sinal de controle, y é a saída do sistema, e R , Ψ são matrizes pesos para a entrada e saída do sistema respectivamente.

5.1.1 O Sistema

Para dedução da modelagem sera feito o uso do método exclusivamente para o modelo de espaço de estados. O sistema que deseja-se controlar será em princípio o mesmo ao longo desta dissertação, um sistema linear de tempo discreto com parâmetros linear variantes (LPV), descrito como segue,

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\mu(k))x(k) + B(\mu(k))u(k) \\ y(k) &= C(\mu(k))x(k) + D(\mu(k))u(k) \end{aligned} \quad (109)$$

em que $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ representa o vetor de estados em tempo discreto, $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o vetor de sinais de controle, $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o vetor de saídas no tempo discreto, $\mu(k)$ é o vetor de parâmetros variantes no tempo dado por,

$$\mu(k) = \left[\mu_1(k), \mu_2(k), \mu_3(k), \dots, \mu_j(k) \right] \in \mathbb{R}^j \quad (110)$$

é mensurável em cada período de amostragem, mas seus valores futuros são considerados incerto. $A(\mu(t)) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ é a matriz dinâmica discreta dos estados, $B(\mu(t)) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ é a matriz dinâmica discreta das entradas de controle e $C(\mu(t)) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ e $D(\mu(t)) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ são as matrizes discretas da relação entre estados e saídas.

As matrizes $A(\mu(t))$, $B(\mu(t))$, $C(\mu(t))$ e $D(\mu(t))$ pertencem a um polítopo convexo defi-

nido por,

$$\Omega = Co \{ [A_1, B_1, C_1, D_1], [A_2, B_2, C_2, D_2], \dots [A_j, B_j, C_j, D_j] \}, \quad (111)$$

em que $[A_S, B_S, C_S, D_S]$ são os vértices do polítopo.

Considerando o fato de que os estados do sistema (109) são imensuráveis, será adotado o seguinte observador de estado para estimar os estados incertos do sistema.

$$\hat{x}(k+1) = A(\mu(k))\hat{x}(k) + B(\mu(k))u(k) + L(y(k) - C(\mu(k))\hat{x}(k)), \quad (112)$$

em que $\hat{x}(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o estado estimado de $x(k)$, e L é o ganho do observador.

5.1.2 Design robusto do observador

A definição do método para design robusto do observador foi apresentada por Wan e Kothare (2002) e aprimorada por Park, Kim e Sugie (2011) para sistemas LPV. Dessa forma, definindo o erro do observador como,

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k). \quad (113)$$

Então o erro dinâmico pode ser dado por,

$$e(k+1) = (A(\mu(k)) - LC(\mu(k)))e(k). \quad (114)$$

Definindo uma função quadrática $E(e(k))$ do erro do observador como,

$$E(e(k)) = e(k)^T P_e e(k), \quad (115)$$

em que $P_e > 0$. Se $E(e(k))$ satisfaz a condição de estabilidade quadrática,

$$E(e(k+1+i)) - \rho^2 E(e(k+i)) < -e(k+i)^T L_e e(k+i) \quad (116)$$

para $i \geq 0$, o decay rate ρ ($0 < \rho < 1$) e $L_e > 0$ uma matriz peso são determinados por um design. O ganho do observador L pode ser calculado pelo teorema 5.

Teorema 5 (PARK; KIM; SUGIE, 2011) *Se existe $G_e(k) > 0$ e $Y_e(k) = G_e(k)L$ satisfazendo a seguinte restrição LMI,*

$$\begin{bmatrix} \rho^2 G_e(k) - L_e & (G_e(k)A_j - Y_e(k)C_j)^T \\ G_e(k)A_j - Y_e(k)C & G_e(k) \end{bmatrix} > 0, \quad (117)$$

onde ρ o decay rate ($0 < \rho < 1$), $L_e > 0$ é uma matriz peso, o ganho observador é obtido por $L = G_e(k)^{-1}Y_e(k)$.

Para provar o Teorema 5 veja que a inequação (116) é equivalente a,

$$\rho^2 G_e(k) - L_e - \Lambda(k+i)^T G_e(k) \Lambda(k+i) > 0. \quad (118)$$

em que, $\Lambda(k+i) = A(\mu(k+i)) - LC(\mu(k+i))$. A expressão (118) pode ser escrita como,

$$\rho^2 G_e(k) - L_e - (G_e(k) \Lambda(k+i))^T G_e(k)^{-1} (G_e(k) \Lambda(k+i)) > 0. \quad (119)$$

Aplicando o complemento de Schur em (119),

$$\begin{bmatrix} \rho^2 G_e(k) - L_e & (G_e(k) \Lambda(\mu(k+i)))^T \\ G_e(k) \Lambda(\mu(k+i)) & G_e(k) \end{bmatrix} > 0. \quad (120)$$

Substituindo $\Lambda(k+i) = A(\mu(k+i)) - LC(\mu(k+i))$ e $Y_e = G_e(k)L$,

$$\begin{bmatrix} \rho^2 G_e(k) - L_e & (G_e(k)A(\mu(k+i)) - Y_e C(\mu(k+i)))^T \\ G_e(k)A(\mu(k+i)) - Y_e C(\mu(k+i)) & G_e(k) \end{bmatrix} > 0. \quad (121)$$

Como a desigualdade (121) é afim em $[A(\mu(k+i))|B(\mu(k+i))|C(\mu(k+i))]$, está satisfeito para todos

$$[A(\mu(k+i))|B(\mu(k+i))|C(\mu(k+i))] \in \Omega. \quad (122)$$

Se, e apenas se existe $G_e > 0$ e Y_e tal que,

$$\begin{bmatrix} \rho^2 G_{ej} - L_e & (G_{ej}A_j - Y_e C_j)^T \\ G_{ej}A_j - Y_e C_j & G_{ej} \end{bmatrix} > 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (123)$$

Então o ganho do observador pode ser obtido por $L = G_{ej}^{-1}Y_e$.

5.1.3 Formulação do MPC robusto

Lu e Arkun (2000) propuseram um MPC com *feedback* de estado para sistemas LPV baseado na técnica *quasi-Min-Max*. Neste método, o limite superior do valor da função objetivo de horizonte infinito é minimizada a cada passo para determinar o sinal de controle ideal que satisfaz as restrições dadas. Já no trabalho de Park, Kim e Sugie (2011) é utilizado a mesma técnica, entretanto os autores propõem um esquema MPC com um modelo de previsão para prever os estados futuros do sistema,

$$\hat{x}(k+1) = A(\mu(k))\hat{x} + B(\mu(k))u(k) \quad (124)$$

em que $\hat{x}(k+1)$ e $u(k)$ denotam o estado predito do sistema (109) e a ação de controle futura respectivamente.

A ação de controle é dada por,

$$u(k|k) = F(k)\hat{x}(k|k), \quad (125)$$

onde $F(k)$ é o ganho de *feedback* determinado no instante k .

Considerando o seguinte problema de otimização para o MPC robusto on-line com restrição. Para determinar a entrada de controle $u(k)$, será minimizado a função custo quadrática de horizonte infinito $J_0^\infty(k)$ em cada instante k .

$$\min_{u(k+i|k), i=0,1,\dots,H} \max_{|A(\mu(k+i))B(\mu(i))| \in \Omega, i \geq 0} J_0^\infty(k) \quad (126)$$

em que,

$$J_0^\infty(k) = J_0^1(k) + J_1^\infty(k), \quad (127)$$

sendo,

$$J_0^1(k) = \hat{x}(k|k)^T \Psi \hat{x}(k|k) + u(k|k)^T R u(k|k), \quad (128)$$

$$J_1^\infty(k) = \sum_{i=0}^{\infty} (\hat{x}(k+i|k)^T \Psi \hat{x}(k+i|k) + u(k+i|k)^T R u(k+i|k)) < \zeta(k). \quad (129)$$

em que Ψ e R são matrizes de peso adequadas para os estados e entrada do sistema respectivamente.

Dessa forma a definição do MPC visa resolver o problema do sistema LPV no espaço de estados. Para resolver o problema considera-se a função quadrática $V(x) = x(k)^T P_j x(k)$ em que, $P_j = P_j \geq 0$, deseja-se obter o equilíbrio de Lyapunov tal que,

$$\dot{V}(\hat{x}(k+i|k)) \leq -J_1^\infty(k). \quad (130)$$

Aplicando a definição de estabilidade de Lyapunov, tem-se

$$V(\hat{x}(k+1+i|k)) - V(\hat{x}(k+i|k)) \leq \hat{x}(k+i|k)^T \Psi \hat{x}(k+i|k) + u(k+i|k)^T R u(k+i|k). \quad (131)$$

Para as demais definições considere $\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k)$. O objetivo é calcular um sinal de controle,

$$u(k) = F(k)\hat{x}(k) \quad (132)$$

em que $F(k)$ é o ganho do controlador. Substituindo (132) em (109) tem-se que $\hat{x}(k+1)$ será dado por,

$$\hat{x}(k+1) = (A_j + B_j F(k))\hat{x}(k), \quad (133)$$

substituindo (132) e (133) em (131), tem-se a desigualdade

$$(A_j + B_j F(k))^T P_j (A_j + B_j F(k)) - P_j + (\Psi + F(k)^T R F(k)) \leq 0. \quad (134)$$

Fazendo $P_j = \zeta(k) Q_j^{-1}$ e substituindo em (134),

$$(A_j + B_j F(k))^T \zeta(k) Q_j^{-1} (A_j + B_j F(k)) - \zeta(k) Q_j^{-1} + (\Psi + F(k)^T R F(k)) \leq 0. \quad (135)$$

multiplicando (135) por $\zeta^{-1}(k)$ e realizando manipulação algébrica, tem-se

$$Q_j^{-1} - (A_j + B_j F(k))^T Q_j^{-1} (A_j + B_j F(k)) - (\Psi^{1/2}) - (R^{1/2} F(k))^T \zeta^{-1}(k) (R^{1/2} F(k)) \geq 0. \quad (136)$$

Multiplicando a expressão (136) por $-Q_j$ à direita e à esquerda e aplicando complemento de Schur definido na def. (1), tem-se

$$\begin{bmatrix} Q_j & [(A_j + B_j F(k)) Q_j]^T & (\Psi^{1/2} Q_j)^T & [(R^{1/2} F(k)) Q_j]^T \\ (A_j + B_j F(k)) Q_j & Q_j & 0 & 0 \\ \Psi^{1/2} Q_j & 0 & \zeta(k) I & 0 \\ R^{1/2} F(k) Q_j & 0 & 0 & \zeta(k) I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (137)$$

Para resolver o problema para $J_0^1(k)$ considera-se a função quadrática $V(x) = x(k)^T P_j x(k)$ em que, $P_j = P_j \geq 0$, deseja-se obter o equilíbrio de Lyapunov tal que,

$$\dot{V}(\hat{x}(k)) \leq -J_0^1(k). \quad (138)$$

Aplicando a definição de estabilidade de Lyapunov, tem-se

$$V(\hat{x}(k+1)) - V(\hat{x}(k)) \leq \hat{x}(k)^T \Psi \hat{x}(k) + u(k)^T R u(k) + T(k)^T P(k) T(k) < \zeta(k). \quad (139)$$

em que,

$$T(k) = A(\mu(k)) \hat{x} + B(\mu(k)) u(k) + L(y(k) - C \hat{x}(k)). \quad (140)$$

Substituindo $P(k) = \zeta(k) Q_j(k)^{-1}$ em (139) e realizando manipulações algébricas, vem que

$$1 - \zeta(k)^{-1} (\hat{x}(k)^T \Psi \hat{x}(k) + u(k)^T R u(k)) - T(k)^T Q_j(k)^{-1} T(k) > 0. \quad (141)$$

Aplicando o complemento de Schur em (141) obtém-se a LMI,

$$\begin{bmatrix} 1 & T(k)^T & (\Psi^{1/2}\hat{x}(k))^T & (R^{1/2}u(k))^T \\ T(k) & Q_j(k) & 0 & 0 \\ \Psi^{1/2}\hat{x}(k) & 0 & \zeta(k)I & 0 \\ R^{1/2}u(k) & 0 & 0 & \zeta(k)I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (142)$$

5.1.3.1 Restrição de entrada

Lema 1 A restrição de entrada $\|u(k+i)\|_2 \leq u_{j,max}$, $j = 1, 2, \dots, n_u$, $i \geq 0$, é garantida se existe uma matriz simétrica U que satisfaz,

$$\begin{bmatrix} U(k) & Y(k) \\ Y^T(k) & Q_j(k) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (143)$$

com $U_{jj} < u_{j,max}^2$, em que $j = 1, 2, \dots, n_u$.

Para resolver o problema de otimização a restrição na futura do sinal de controle $u(k+i)$ precisa ser considerada. Para essa restrição, considere os limites,

$$|u_j(k+i)| \leq u_{j,max}, \quad j = 1, 2, \dots, n_u, \quad i \geq 1. \quad (144)$$

Assim,

$$\max |u_j(k+i)|^2 = \max |(YQ_j^{-1}\hat{x}(k+i))_j|^2, \quad (145)$$

$$\leq \max |(YQ_j^{-1}\hat{x}_j)|^2, \quad (146)$$

$$\leq \|(YQ_j^{-1/2})_j\|_2^2, \quad (147)$$

$$= (YQ_j^{-1}Y^T)_{jj}. \quad (148)$$

Dessa forma, aplicando o complemento de Schur em (148) e se existe uma matriz U tal que $U_{jj} < u_{j,max}^2$, obtém-se a LMI (143). Assim para o sistema LPV com restrições de entrada, o objetivo é encontrar a entrada de controle $u(k)$ e o ganho de *feedback* $F(k)$ garantindo estabilidade e restrição do sistema. Além da restrição de entrada, é necessário também definir as condições de robustez do controlador.

5.1.3.2 Condição de robustez

O problema de otimização descrito anteriormente não garante a estabilidade robusta. Portanto, assim como em Park, Kim e Sugie (2011) considera-se a seguinte restrição de estabilidade

para garantir uma estabilidade robusta:

$$\zeta(k) < \zeta(k-1). \quad (149)$$

Além disso, como $P(k)$ em (135) varia, uma restrição adicional é necessária para a estabilidade robusta. Se $P(k)$ assumi valor próximo de zero, $\hat{x}(k+1)$ pode ser muito grande mesmo quando $\hat{x}(k+1)^T P(k) \hat{x}(k+1)$ torna-se quase zero. Como similar em Wan e Kothare (2003b), (PARK; KIM; SUGIE, 2011) também considerou a seguinte restrição, a fim de evitar tal problema,

$$P(k) > \varepsilon I, \quad (150)$$

substituindo $P(k)$ por $\zeta(k)Q_j(k)^{-1}$,

$$\zeta(k)Q_j(k)^{-1} > \varepsilon I, \quad (151)$$

$$\zeta(k)I - \varepsilon Q_j(k) > 0, \quad (152)$$

para algum $\varepsilon > 0$.

Portanto o problema de minimização pode ser definido pelo seguinte teorema definido por Park, Kim e Sugie (2011):

Teorema 6 *Para o sistema LPV (124) sujeito à restrição de entrada (144), o problema de otimização (126) para encontrar $u(k)$ e o ganho de feedback $F(k)$, pode ser resolvido pelo seguinte problema de otimização.*

$$\min_{u(k), Y(k), Q(k)} \zeta(k) \quad (153)$$

sujeito à, (137), (142), (143), (149) e (152).

5.2 QUASE-MIN-MAX MPC COM RELAXAÇÃO

Neste sessão é proposto uma melhoria da técnica de controle de Park, Kim e Sugie (2011) e Kim e Lee (2017). Dessa forma é apresentando um novo procedimento para MPC robusto com restrições com *feedback* de saída usando o método *quasi-min-max* para o sistema LPV com estimador. Foi visto que a formulação de Park, Kim e Sugie (2011) pode levar a uma solução de inviabilidade e os ganhos de design controlador-observador não são garantidos pelo lema de separação.

5.2.1 Vantagens em utilizar o procedimento de relaxação

Uma das principais vantagens do MPC é a capacidade de lidar com restrições sobre as entradas e estados da planta de maneira explícita (MORARI; LEE, 1999), (CAMACHO; ALBA, 2013). Mas deve-se considerar que os problemas de otimização do MPC podem se tornar inviáveis na presença de restrições devido a incompatibilidades de modelo-planta, perturbações externas, ruído ou falhas (AFONSO; GALVÃO, 2012). Tal problema motiva o desenvolvimento de técnicas destinadas a recuperar a viabilidade sem violar as restrições físicas impostas pela natureza da planta (CUZZOLA; GEROMEL; MORARI, 2002), (LEE *et al.*, 2007), (YU *et al.*, 2009).

Devido à incerteza presente no sistema LPV, a solução poderia estar em uma região fora do politópico e inviabilizar o problema de controle. Para corrigir isso e encontrar a solução, podemos aumentar a região politópica. Mas como podemos aumentar a região?

Um procedimento que pode ser usado para melhorar o problema da inviabilidade é o relaxamento das restrições da estabilidade de Lyapunov. Na literatura, existem alguns métodos de relaxamento conhecidos, como o proposto por Cuzzola, Geromel e Morari (2002), Wollnack *et al.* (2017) e Abbas *et al.* (2017).

O relaxamento proposto por Cuzzola, Geromel e Morari (2002) consiste em um procedimento que reduz o conservadorismo do casco convexo sem perder as propriedades de viabilidade e melhorar o desempenho de estabilidade. Usando este método, é possível projetar um controle preditivo modelo para uma classe mais ampla de sistemas de LPV incertos (WADA; SAITO; SAEKI, 2006).

5.2.2 Design robusto do observador com relaxação

O design robusto do observador com relaxação é definido como segue no Teorema 7.

Teorema 7 Se existe $G_e(k) > 0$, $X(k)_e > 0$, $X_e(k) \neq X_e(k)^T$ e $Y_e(k) = X_e(k)L$ satisfazendo a seguinte restrição LMI,

$$\begin{bmatrix} \rho^2(X_e(k) + X_e(k)^T - G_e(k)) - L_e & (X_e(k)A_j - Y_e(k)C_j)^T \\ X_e(k)A_j - Y_e(k)C_j & G_e(k) \end{bmatrix} > 0, \quad (154)$$

onde ρ o decay rate ($0 < \rho < 1$), $L_e > 0$ é uma matriz peso e o ganho observador é obtido por $L = X_e(k)^{-1}Y_e(k)$.

Definido o erro como $e(k) = x(k) - \hat{x}$. Então, para o sistema (109) e o estado do observador (112) tem-se,

$$e(k+1) = (A(p(k)) - LCp(k))e(k). \quad (155)$$

Definindo uma função quadrática $E(e(k))$ para estimação do erro $e(k)$ como

$$E(e(k)) = e(k)G_e(k)e(k), \quad G_e(k) > 0. \quad (156)$$

Aplicando a condição de estabilidade quadrática

$$E(e(k+1)) - \rho^2 E(e(k)) < -e(k)^T L_e e(k). \quad (157)$$

A equação (157) é equivalente à

$$\rho^2 G_e(k) - L_e(A(p(k)) - LCp(k))^T G_e(k)(A(p(k)) - LCp(k))^T > 0, \quad (158)$$

a qual pode ser reescrita como,

$$\begin{aligned} & \rho^2 G_e(k) - L_e(G_e(k)(A(p(k)) - LCp(k)))^T \\ & G_e(k)^{-1}(G_e(k)(A(p(k)) - LCp(k))) > 0. \end{aligned} \quad (159)$$

Aplicando o complemento de Schur em (159),

$$\begin{bmatrix} \rho^2 G_e(k) - L_e & (G_e(k)(A(p(k)) - LCp(k)))^T \\ G_e(k)(A(p(k)) - LCp(k)) & G_e(k) \end{bmatrix} > 0. \quad (160)$$

aplicando a relaxação na LMI, multiplicando à esquerda por

$$\text{diag}(X(k)^T G_e(k)^{-1}, I) \quad (161)$$

e a direita por,

$$\text{diag}(G_e(k)^{-1}X(k), I) \quad (162)$$

e considerando $X(k)^T G_e(k)^{-1} X(k) \geq X(k) + X(k)^T - G_e(k)$, tem-se

$$\begin{bmatrix} \rho^2(X_e(k) + X_e(k)^T - G_e(k)) - L_e & (X_e(k)A_j - Y_e(k)C_j)^T \\ X_e(k)A_j - Y_e(k)C_j & G_e(k) \end{bmatrix} > 0. \quad (163)$$

Portanto, resolvendo a LMI (163) obtém-se o ganho do observador.

5.2.3 Formulação do MPC com relaxação

A ideia aqui é aplicar uma relaxação na LMI (137) como visto em (59). Assim multiplicando à esquerda da matriz (137) por,

$$\text{diag}(X^T Q_j^{-1}, I, I, I) \quad (164)$$

e à direita por,

$$\text{diag}(Q_j^{-1} X, I, I, I) \quad (165)$$

tem-se,

$$\begin{bmatrix} X^T Q_j^{-1} X & [(A_j + B_j F(k))X]^T & (\Psi^{1/2} X)^T & [(R^{1/2} F(k))X]^T \\ (A_j + B_j F(k))X & Q_j & 0 & 0 \\ \Psi^{1/2} X & 0 & \zeta(k)I & 0 \\ R^{1/2} F(k)X & 0 & 0 & \zeta(k)I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (166)$$

sabendo que $X^T Q_j^{-1} X \geq X + X^T - Q_j$, obtém-se,

$$\begin{bmatrix} X + X^T - Q_j & [(A_j + B_j F(k))X]^T & (\Psi^{1/2} X)^T & [(R^{1/2} F(k))X]^T \\ (A_j + B_j F(k))X & Q_j & 0 & 0 \\ \Psi^{1/2} X & 0 & \zeta(k)I & 0 \\ R^{1/2} F(k)X & 0 & 0 & \zeta(k)I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (167)$$

Fazendo $Y = F(k)X$, obtém-se a a LMI,

$$\begin{bmatrix} X + X^T - Q_j & (A_j X + B_j Y)^T & (\Psi^{1/2} X)^T & (R^{1/2} Y)^T \\ (A_j X + B_j Y) & Q_j & 0 & 0 \\ \Psi^{1/2} X & 0 & \zeta(k)I & 0 \\ R^{1/2} Y & 0 & 0 & \zeta(k)I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (168)$$

$j = 1, \dots, p$, em que $F(k) = YX^{-1}$.

Essa restrição permite que as LMIs aumentem a sua região de factibilidade. Cuzzola, Geromel e Morari (2002) adota essa condição para obter a relaxação do MPC proposto por

Kothare, Balakrishnan e Morari (1996). E aqui é aplicado essa restrição para obter-se a relaxação do MPC proposto por Park, Kim e Sugie (2011), Lu e Arkun (2000).

5.2.3.1 Restrição de entrada com relaxação

Assim como definido no Lema 1 a restrição de entrada para o sinal de controle, nesta sessão será apresentado a inequação matricial para restrição do sinal de controle utilizada no modelo relaxado como proposto em Cuzzola, Geromel e Morari (2002).

Lema 2 *A restrição de entrada $\|u(k+i)\|_2 \leq u_{j,max}$, $j = 1, 2, \dots, n_u$, $i \geq 0$, é garantida se existe uma matriz simétrica U e X que satisfaz,*

$$\begin{bmatrix} U(k) & Y(k) \\ Y^T(k) & X(k) + X(k)^T - Q_j(k) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (169)$$

com $U_{jj} < u_{j,max}^2$, em que $j = 1, 2, \dots, n_u$.

Para resolver o problema de otimização a restrição na futura do sinal de controle $u(k+i)$ precisa ser considerada. Para essa restrição, considere os limites,

$$|u_j(k+i)| \leq u_{j,max}, \quad j = 1, 2, \dots, n_u, \quad i \geq 1. \quad (170)$$

Assim,

$$\max |u_j(k+i)|^2 = \max |(YQ_j^{-1}\hat{x}(k+i))_j|^2, \quad (171)$$

$$\leq \max |(YQ_j^{-1}\hat{x}_j)|^2, \quad (172)$$

$$\leq \|(YQ_j^{-1/2})_j\|_2^2, \quad (173)$$

$$= (YQ_j^{-1}Y^T)_{jj}. \quad (174)$$

Multiplicando (174) por X^T á esquerda e X à direita tem-se,

$$= (YX^TQ_j^{-1}XY^T)_{jj}, \quad (175)$$

aplicando a condição (59), segue que

$$= (Y(X + X^T - Q_j)Y^T)_{jj}. \quad (176)$$

Portanto aplicando o complemento de Schur em (176) obtém-se a LMI (169).

5.2.3.2 Condição de robustez para o modelo relaxado

A condição (150) não garante a estabilidade para o modelo relaxado. Visando manter a estabilidade no modelo relaxado aplica-se o conceito de relaxação visto em (59). Dessa forma, multiplicando (150) por X^T à esquerda e X à direita, tem-se

$$X(k)^T \zeta(k) Q_j^{-1}(k) X(k) > \epsilon X(k)^T X(k), \quad (177)$$

$$X(k)^T Q_j^{-1}(k) X(k) > \zeta^{-1}(k) \epsilon X(k)^T X(k). \quad (178)$$

Considerando a expressão (59) e aplicando-a em (178), vem que

$$\zeta(k)(X(k) + X(k)^T - Q_j(k)) > \epsilon X(k)^T X(k), \quad (179)$$

$$\zeta(k)(X(k) + X(k)^T - Q_j(k)) - \epsilon X(k)^T X(k) > 0. \quad (180)$$

Dessa forma a restrição (180) é adicionada no modelo relaxado.

Portanto o problema de minimização MPC com relaxação pode ser definido pelo seguinte teorema:

Teorema 8 *ara o sistema LPV (124) sujeito à restrição de entrada (144), o problema de otimização (126) para encontrar $u(k)$ e o ganho de feedback $F(k)$, pode ser resolvido pelo seguinte problema de otimização.*

$$\min_{u(k), Y(k), X(k), Q(k)} \zeta(k) \quad (181)$$

sujeito à, (168), (142), (169) e (180).

5.3 EXEMPLO NUMÉRICO

Para testar e comparar a eficácia da técnica de MPC-LPV proposta, será usado o mesmo exemplo de Park, Kim e Sugie (2011) definido por,

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\alpha(k))x(k) + B(\beta(k))u(k), \\ y(k) &= Cx(k), \end{aligned} \quad (182)$$

onde,

$$A(\alpha(k)) = \begin{bmatrix} 0.872 & -0.0623\alpha(k) \\ 0.0935 & 0.997 \end{bmatrix}, \quad (183)$$

$$B(\beta(k)) = \beta(k) \begin{bmatrix} 0.0935 \\ 0.00478 \end{bmatrix}, \quad (184)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.333 & -1 \end{bmatrix}. \quad (185)$$

Os estados inicial do sistema (182) e do observado são adotados como $x = [-1.5 \ -0.2]^T$ e $\hat{x} = [-0.5 \ -1]^T$, respectivamente. Assim, o sistema LPV acima pertence ao seguinte polítopo formado pelos dois modelos locais discretos,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.872 & -0.0623 \\ 0.0935 & 0.997 \end{bmatrix}, \quad (186)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.872 & -0.3115 \\ 0.0935 & 0.997 \end{bmatrix}, \quad (187)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.0094 \\ 0.0005 \end{bmatrix}, \quad (188)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0.0935 \\ 0.0048 \end{bmatrix}. \quad (189)$$

Inicialmente, assumimos que os parâmetros incertos pertencem às seguintes regiões:

$$\alpha(k) \in [1, \delta] \quad \beta(k) \in [0.1, 1]. \quad (190)$$

O parâmetro δ será variado para mostrar que existe sistemas incertos que não podem ser controlados com a técnica de Park, Kim e Sugie (2011) e Kim e Lee (2017). No entanto, pode ser controlado recorrendo à técnica proposta neste trabalho.

A restrição de entrada é assumida como,

$$|u(k)| \leq 1, \quad k \geq 0. \quad (191)$$

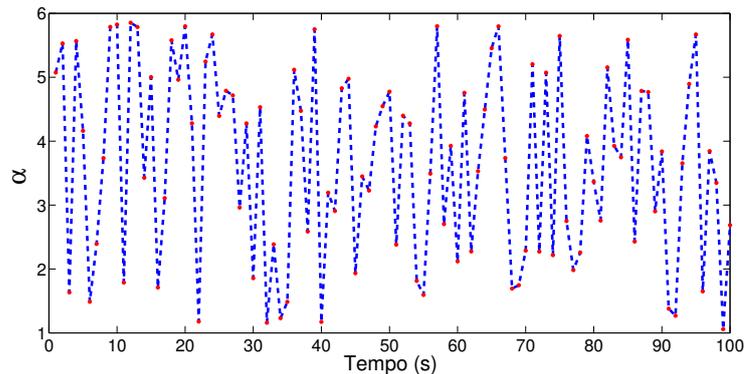
E as matrizes peso, $\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R = 1$, o ganho do observador L obtido foi $L = [-0.7250 \ -1.4543]^T$, com $\rho = 0.6^{1/2}$.

Aplicou-se a este sistema as técnicas apresentadas neste trabalho, a técnica proposta em Park, Kim e Sugie (2011) e Kim e Lee (2017). Foi observado que o problema de síntese de Park, Kim e Sugie (2011) torna-se inviável para $\delta > 8$, Kim e Lee (2017) torna-se inviável para $\delta > 7$, e processo proposto neste trabalho com relaxação, torna-se inviável para $\delta > 17$.

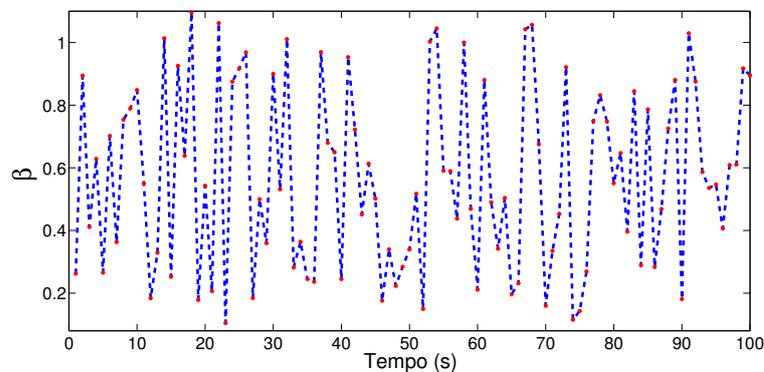
5.3.1 Resultados

Para comparar o desempenho das técnicas de Park, Kim e Sugie (2011), Kim e Lee (2017) e a proposta neste trabalho, foi gerado randomicamente os valores para os parâmetros $\alpha \in [1, 5]$ e $\beta \in [0.1, 1]$. Os valores assumidos por esses parâmetros podem ser visto na Figura 13.

Figura 13: Variação dos parâmetros: a) variação de α b) variação de β .



(a) Trajetória para α para o sistema.



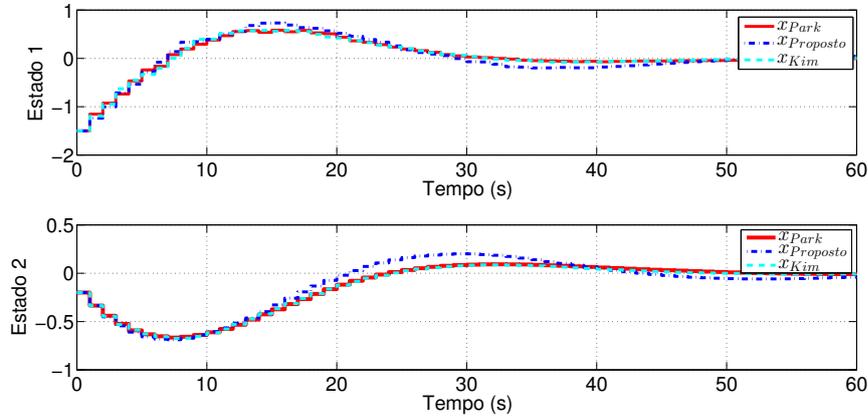
(b) Trajetória para β para o sistema.

Fonte: Autor.

Na Figura 14 é apresentado os estados $x(k)$ obtidos via simulação para $\alpha \in [1, 5]$ e $\beta \in [0.1, 1]$. $x(k)_{Park}$ representa os estados obtidos com a técnica proposta por Park, Kim e Sugie

(2011). $x(k)_{Kim}$ representa os estados obtidos com a técnica proposta por Kim e Lee (2017) e $x(k)_{Proposto}$ representa os estados obtidos com a técnica proposta neste trabalho.

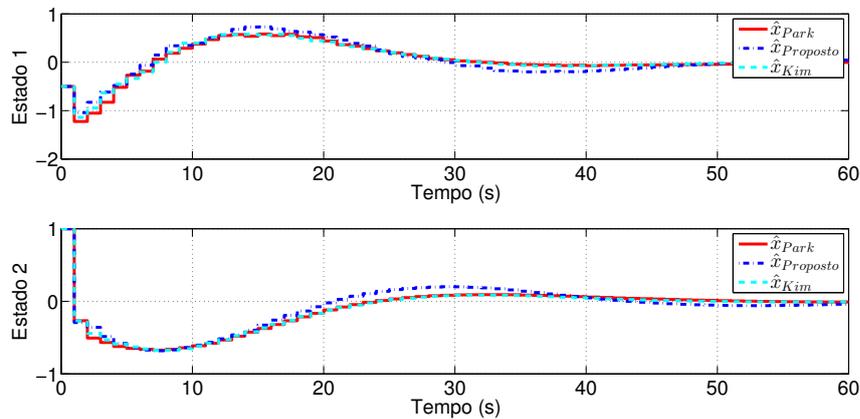
Figura 14: Estados do sistema.



Fonte: Autor.

Na Figura 15 é apresentado os estados estimados $\hat{x}(k)$ obtidos via simulação para $\alpha \in [1, 5]$ e $\beta \in [0.1, 1]$. $\hat{x}(k)_{Park}$ representa os estados obtidos com a técnica proposta por Park, Kim e Sugie (2011). $\hat{x}(k)_{Kim}$ representa os estados obtidos com a técnica proposta por Kim e Lee (2017) e $\hat{x}(k)_{Proposto}$ representa os estados obtidos com a técnica proposta neste trabalho.

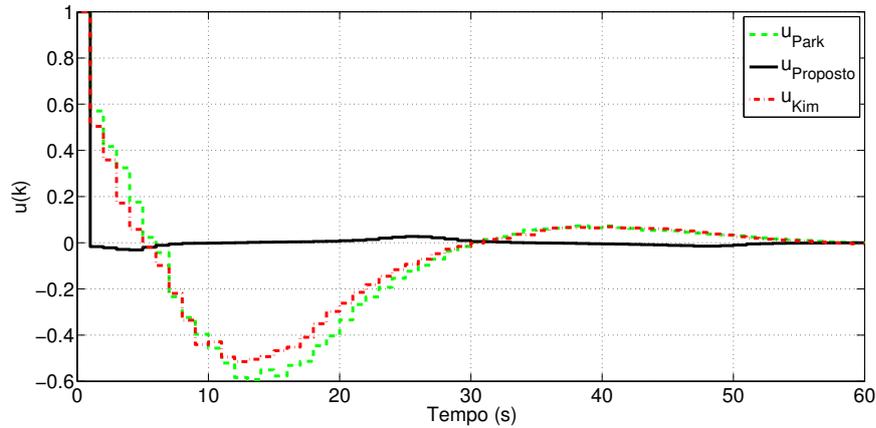
Figura 15: Estados do observador do sistema.



Fonte: Autor.

Na Figura 16 tem-se a entrada de controle aplicada $u(k)$ obtidas via a técnica proposta por Park, Kim e Sugie (2011), Kim e Lee (2017) e a proposta neste trabalho, todos satisfazem a restrição de entrada. No entanto, é possível observar que o sinal de controle $u(k)$ obtido com a técnica proposta neste trabalho, apresenta pouca ou nenhuma oscilação, diferente do sinal de controle obtido com as técnicas de Park, Kim e Sugie (2011) e Kim e Lee (2017).

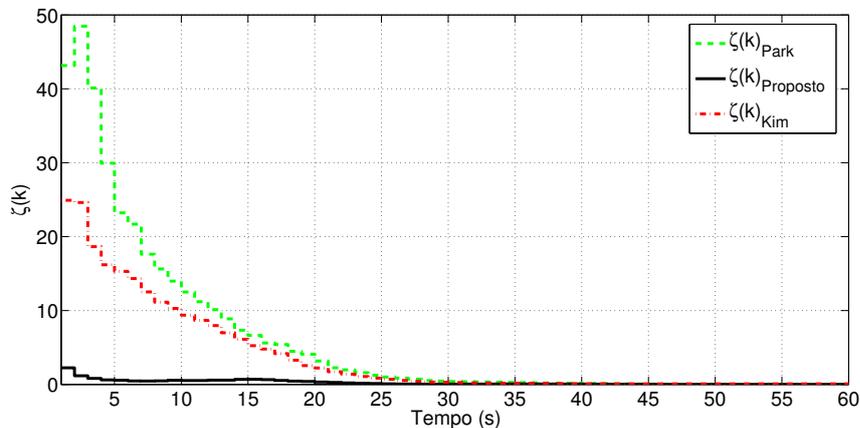
Figura 16: Sinal de controle.



Fonte: Autor.

A Figura 17 ilustra os resultados da simulação de Park, Kim e Sugie (2011) ($\zeta(k)_{Park}$), Kim e Lee (2017) ($\zeta(k)_{Kim}$) e o método proposto neste trabalho ($\zeta(k)_{Proposto}$). O limite superior do pior caso $\zeta(k)$ do índice de função objetivo é mais aprimorado do que outros resultados quando faz-se o uso das matrizes de relaxamento no sistema LPV. Para $\delta = 5$ o limite superior do custo $\zeta(0)$ proposto Park, Kim e Sugie (2011) é aproximadamente 45 e com a técnica de Kim e Lee (2017) é aproximadamente 25 e com a técnica proposta neste trabalho é 2.253.

Figura 17: Função objetivo.

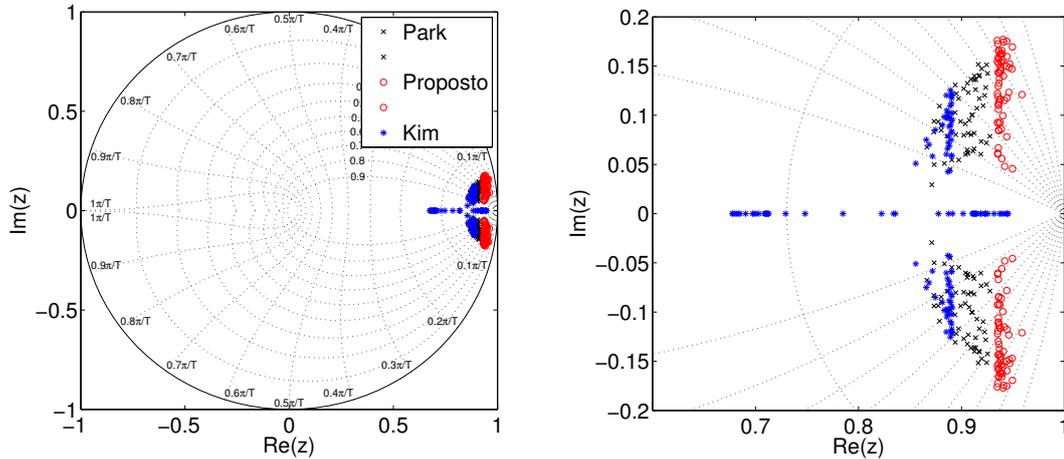


Fonte: Autor.

Nas Figuras 18 e 19 são mostrados os polos do sistema. Portanto, é visto que o controlador relaxado do MPC é sempre estável, independente da condição do LPV, dentro das condições de projeto.

Quando a região dos parâmetros $\alpha(k)$ e $\beta(k)$ são expandidas o MPC proposto por Park, Kim e Sugie (2011) e Kim e Lee (2017) não consegue encontrar uma solução. Com o MPC proposto, a solução é encontrada e o sistema permanece estável durante todo o processo, porque seus polos estão dentro do círculo unitário, como mostrado na Figura 19.

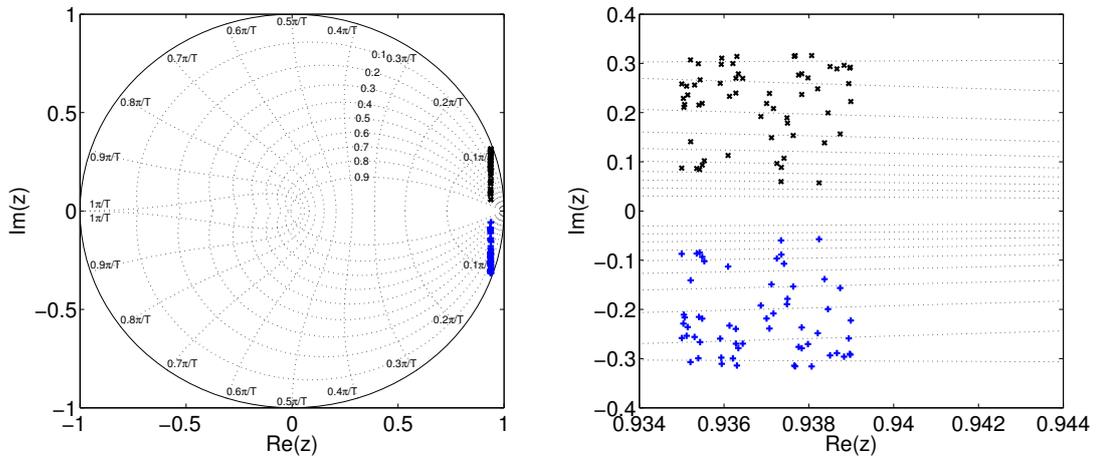
Figura 18: Análise de polos do sistema LPV para $\alpha \in [1,5]$ e $\beta \in [0.1,1]$: a) polos e seus conjugados para as 3 técnicas simuladas. b) zoom da alocação dos polos e seus conjugados para as 3 técnicas simuladas.



(a) Círculo unitário com os polos e seus conjugados (b) Zoom no círculo unitário da alocação dos polos e seus conjugados

Fonte: Autor.

Figura 19: Análise dos polos (x) e seus conjugados (+) do sistema LPV para $\alpha \in [1,17]$ e $\beta \in [0.1,1]$: a) polos e seus conjugados para técnica proposta. b) zoom da alocação dos polos e seus conjugados para técnica proposta.



(a) Círculo unitário com os polos e seus conjugados (b) Zoom no círculo unitário da alocação dos polos e seus conjugados

Fonte: Autor.

5.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO

Foi apresentado um procedimento de melhoria para o controle robusto de MPC restrito para sistemas LPV ou LTV baseado no algoritmo *quasi-min-max* com relaxamento LMI. Foi visto que a formulação de Park, Kim e Sugie (2011) pode levar a uma solução de inviabilidade e os ganhos de design controlador-observador não são garantidos pelo lema de separação (SU; TAN, 2012; KIM; LEE, 2017; WAN; KOTHARE, 2002; DOYLE, 1978). Apesar de Kim e Lee (2017) mostrar melhorias em comparação com Park, Kim e Sugie (2011). Elas não são suficientemente eficientes para grandes incertezas. Assim, foi visto que a melhoria proposta mostrada neste trabalho garante a solução de estabilidade e viabilidade usando os procedimentos de Cuzzola, Geromel e Morari (2002). Além disso, os resultados levam a uma convergência mais rápida do que os métodos *benchmark* descritos no trabalho.

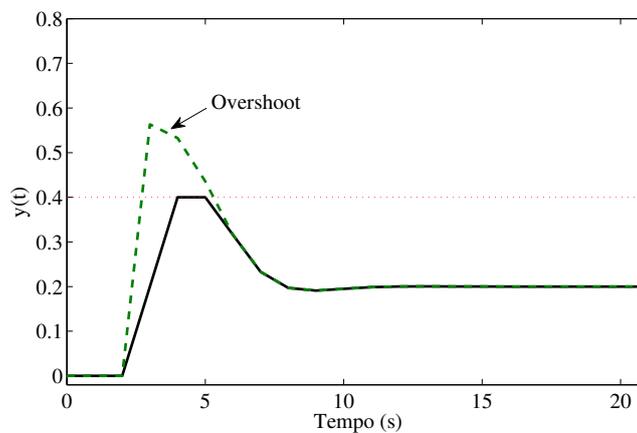
Portanto, a ideia da técnica proposta é aumentar a região da solução do modelo LPV. Uma solução menos conservadora foi obtida usando o relaxamento LMI. Como mostrado no exemplo numérico, se aumentarmos a região dos parâmetros incertos, o MPC relaxado continua garantindo uma solução estável e viável.

6 COMPENSADOR ANTI-WINDUP (AW)

Na prática o sinal de controle fica com um valor diferente do sinal que realmente atua na planta, isto é, o sinal de controle fica na região de saturação, o que não é desejado pois ocorre uma deterioração do desempenho do sistema. Esse fenômeno é conhecido como *windup*.

Um exemplo típico de *windup* é um *overshoot* no sinal de saída da planta, enquanto o sinal de controle está na região de saturação (Figura 20).

Figura 20: Sinal na região de saturação.



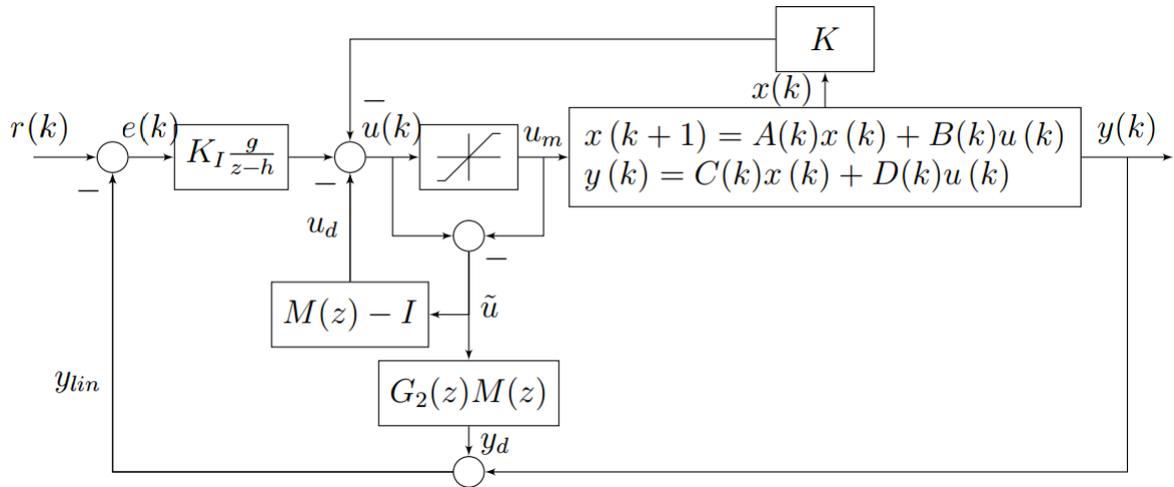
Fonte: Autor.

De modo a evitar que o sinal de controle entre na região de saturação, existem técnicas conhecidas como *anti-windup* (AW). Doná, Goodwin e Seron (2000) em seu trabalho discute a relação entre a técnica AW e o controle MPC, em que o controle AW considerado no trabalho é baseado na lei de controle de malha fechada com estado saturado aplicado a sistema LTV. Turner, Herrmann e Postlethwaite (2003) propõem um AW formulado em tempo discreto usando uma configuração que efetivamente dissocia partes linear nominal e não-lineares de um sistema de malha fechada com restrições.

Wada e Saeki (2016) mostra um método de projeto de um compensador anti-windup com o controle MPC para um sistema com restrições de entrada. Assim como Ran, Wang e Dong (2016) propõe a aplicação de AW em sistemas incertos. Rego *et al.* (2018) apresenta a proposta do controlador preditivo baseado em modelo com atuador *anti-windup* (AW) otimizados via LMIs para o controle do conversor *boost*.

Dessa forma, neste trabalho a ideia é aplicar a técnica de AW proposta em Herrmann, Turner e Postlethwaite (2003) na modelagem do MPC proposto para sistemas baseado em uma abordagem politópica incerta.

Figura 21: Diagrama de blocos com AW.



Fonte: Rego *et al.* (2018).

conforme modelagens definidas em Turner, Herrmann e Postlethwaite (2003) e Skogestad e Postlethwaite (2007). Assim com base em (196) as matrizes coprimas podem ser definidas como,

$$\begin{bmatrix} M(z) - I \\ G_2(z)M(z) \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{c|c} A_j + B_j F_a & B_j \\ \hline F_a & 0 \\ \hline C_j + D_j F_a & D_j \end{array} \right] \quad (197)$$

em que $G_2(z) = N(z)M^{-1}(z) = ss(A, B, C, D)$ é a planta e $M(z) - I$ são o modelo no espaço de estados por fatoração coprima. Assim o ganho F_a pode ser obtido por meio da LMI (192), em que o compensador discreto AW é definido por,

$$\Theta(z) = \begin{bmatrix} M(z) - I \\ G_2(z)M(z) \end{bmatrix}. \quad (198)$$

6.2 MODELAGEM ANTI-WINDUP COM RELAXAÇÃO

Como explicado no Capítulo 5 as vantagens do processo de relaxação na LMI do controlador, e visando também aumentar a elasticidade do politopo na LMI (192), será aplicado o processo de relaxação da LMI. Dessa forma, considerando a LMI (192) escrita como,

$$\begin{bmatrix} -Q_{aj} & -F_{aj}Q_{aj}^T & 0 & ((C_j + D_jF_{aj})Q_{aj})^T & ((A_j + B_jF_{aj})Q_{aj})^T \\ -F_{aj}Q_{aj} & -2U_a & I & (D_jU_a)^T & (B_jU_a)^T \\ 0 & I & -\mu_a I & 0 & 0 \\ (C_j + D_jF_{aj})Q_{aj} & D_jU_a & 0 & -I & 0 \\ (A_j + B_jF_{aj})Q_{aj} & B_jU_a & 0 & 0 & -Q_{aj} \end{bmatrix} < 0. \quad (199)$$

Definindo a matriz $X_a \neq X_a^T$, isto é, as matrizes X_{aj} são não-singulares, portanto, $X_a(k) = \sum_{j=1}^l \mu_j X_{aj}$. Multiplicando à esquerda da matriz (199) por,

$$\text{diag}(X_a^T Q_{aj}^{-1}, I, I, I, I) \quad (200)$$

e à direita por,

$$\text{diag}(Q_{aj}^{-1} X_a, I, I, I, I) \quad (201)$$

como visto em (59) tem-se,

$$\begin{bmatrix} -X_a^T Q_{aj}^{-1} X_a & -F_{aj} X_a^T & 0 & ((C_j + D_jF_{aj})X_a)^T & ((A_j + B_jF_{aj})X_a)^T \\ -F_{aj} X_a & -2U_a & I & (D_jU_a)^T & (B_jU_a)^T \\ 0 & I & -\mu_a I & 0 & 0 \\ (C_j + D_jF_{aj})X_{aj} & D_jU_a & 0 & -I & 0 \\ (A_j + B_jF_{aj})X_{aj} & B_jU_a & 0 & 0 & -Q_{aj} \end{bmatrix} < 0. \quad (202)$$

sabendo que $-X_a^T Q_{aj}^{-1} X_a \geq -(X_a + X_a^T - Q_{aj})$, obtém-se,

$$\begin{bmatrix} -(X_a + X_a^T - Q_{aj}) & -L_a^T & 0 & (C_j X_a + D_j L_a)^T & (A_j X_a + B_j L_a)^T \\ -L_a & -2U_a & I & (D_j U_a)^T & (B_j U_a)^T \\ 0 & I & -\mu_a I & 0 & 0 \\ C_j X_a + D_j L_a & D_j U_a & 0 & -I & 0 \\ A_j X_a + B_j L_a & B_j U_a & 0 & 0 & -Q_{aj} \end{bmatrix} < 0. \quad (203)$$

Dessa forma, o ganho *anti-windup* pode ser obtido por meio do seguinte teorema:

Teorema 10 *Se existe um compensador dinâmico no tempo discreto que soluciona o problema de windup se, e somente se, existe uma matriz $Q_a = Q_a^T > 0$, $X_a \neq X_a^T$, $U_a = U_a^T > 0$, $L_a \in \mathbb{R}^{(m+q) \times m}$*

e um escalar $\mu_a < 0$, de modo que a desigualdade matricial abaixo é satisfeita,

$$\begin{bmatrix} -(X_a + X_a^T - Q_{aj}) & -L_a^T & 0 & (C_j X_a + D_j L_a)^T & (A_j X_a + B_j L_a)^T \\ -L_a & -2U_a & I & (D_j U_a)^T & (B_j U_a)^T \\ 0 & I & -\mu_a I & 0 & 0 \\ C_j X_a + D_j L_a & D_j U_a & 0 & -I & 0 \\ A_j X_a + B_j L_a & B_j U_a & 0 & 0 & -Q_{aj} \end{bmatrix} < 0. \quad (204)$$

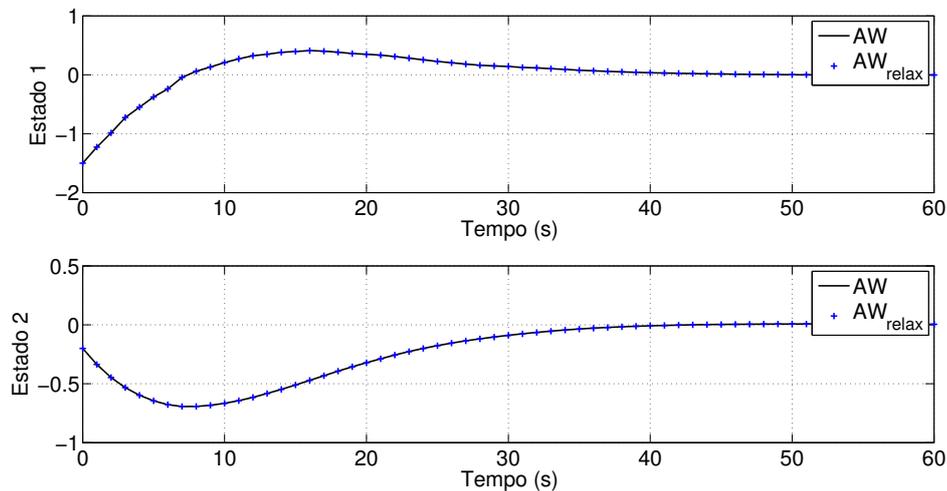
Em que $j = 1, \dots, p$, e o ganho $F_a(k) = L_a X_a^{-1}$.

6.3 EXEMPLO NUMÉRICO

Para realizar a comparação entre a LMI relaxada e a não relaxada será utilizado o mesmo exemplo numérico descrito na sessão 5.3.

Os resultados obtidos podem ser visualizados nas Figuras 22 e 23. Na Figura 22 é possível observar que os resultados são idênticos. Era o que se esperava, já que a relaxação permite apenas uma maior abrangência de uma dada região politópica. O controle torna-se inviável, isto é, não encontra a solução para $\delta > 17$.

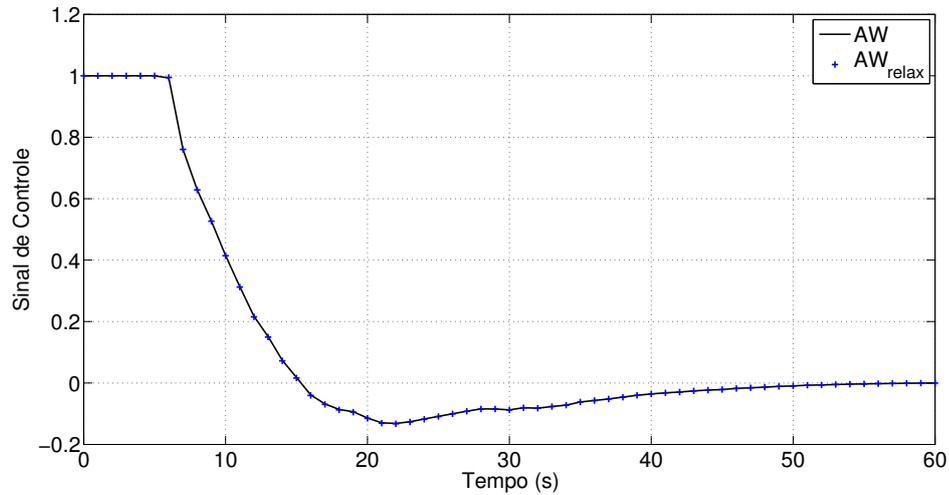
Figura 22: Estados do sistema obtidos com AW.



Fonte: Autor.

Na Figura 23 tem-se o sinal de controle. É possível vê que a restrição de $|u_{max}| \leq 1$ é garantida.

Figura 23: Sinal de controle do sistema obtidos com AW.



Fonte: Autor.

6.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO

Este capítulo abordou a técnica de *anti-windup* estabelecido por Turner, Herrmann e Postlethwaite (2003). Dessa forma, foi proposto condições de relaxação no modelo AW descrito por Turner, Herrmann e Postlethwaite (2003), visando garantir a estabilidade sob condições menos conservadoras no pranto de vista da estratégia de controle. Os resultados do exemplo numérico mostraram que a técnica relaxada garante os mesmo princípios da não relaxada, no entanto, o *anti-windup* com relaxação permite uma maior abrangência de uma região politópica, permitindo assim uma maior abrangência em solução de sistemas LPVs ou com parâmetros incertos.

7 CONTROLADOR MPC *OFFLINE* COM ATUADOR ANTI-WINDUP

Este capítulo apresenta o desenvolvimento de um modelo plenamente *offline* do controle relaxado proposto no capítulo 5, como base para aplicação em uma planta experimental utilizando os conceitos de elipsoides de estabilidade proposto por Wan e Kothare (2002).

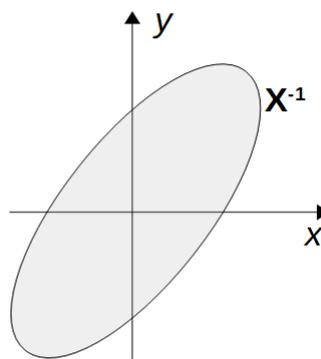
7.1 CONTROLADOR MPC *OFFLINE*

Wan e Kothare (2002) propôs uma formulação *offline* para o MPC-LMI iterativo proposto por Kothare, Balakrishnan e Morari (1996). Dessa maneira, tornou-se possível garantir a estabilidade do modelo com restrições utilizando-se apenas de um ganho estático, bastando apenas guardá-lo em um conjunto de ganhos, denominado de *lookup table*.

Para definição do controle *offline*, é necessário definir um conjunto de pontos fixados na extremidade na elipsoide de estabilidade como proposto em Wan e Kothare (2002) e Costa (2017).

Segundo Costa (2017), Kothare, Balakrishnan e Morari (1996) o conceito físico das elipsóides de estabilidade no controle robusto é interpretado da seguinte forma: seja uma resposta BIBO estável de malha fechada por excitação tipo FIR (*Finite Impulse Response*), dentro das condições iniciais circunscritas na região da curva elipsoidal, tenderá à zero em regime permanente sem violar qualquer um dos limites dentro da elipsóide (Figura 24). Dessa

Figura 24: Elipsoides invariantes.



Fonte: Autor.

forma, cada matriz X^{-1} pode ser projetada geometricamente como uma elipse ou uma elipsóide de acordo com os princípios da diagonalização e da projeção quadrática da álgebra linear (COSTA, 2017).

Logo para garantir que a LMI (168) seja satisfeita, considera-se que $V(x(k|k)) \leq \zeta$, em que V é a função de Lyapunov e ζ é a função objetivo. Assim para $V(x(k|k)) \leq \zeta \Rightarrow J_0^\infty \leq V(x(k|k)) \leq \zeta$, tem-se a restrição

$$x(k|k)^T P_j x(k|k) \leq \zeta \Rightarrow x(k|k)^T Q_j^{-1} x(k|k) \Rightarrow 1 - x(k|k)^T Q_j^{-1} x(k|k) \geq 0. \quad (205)$$

Aplicando o complemento de Schur em (205), tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & x(k|k) \\ x(k|k)^T & Q_j \end{bmatrix} \geq 0, \quad Q_j = Q_j^T \geq 0. \quad (206)$$

Dessa forma, a robustez é garantida se a resposta, em nenhum instante do plano de estados, sair da plano elipsoidal (KOTHARE; BALAKRISHNAN; MORARI, 1996), (CUZZOLA; GEROMEL; MORARI, 2002), (COSTA, 2017).

Wan e Kothare (2003b) propõe um MPC para LTV com um conjunto de restrições de terminal. Em que é especificado explicitamente o tamanho da restrição do terminal definida como maior que um círculo de raio r , isto é,

$$Q_j - r^2 I \geq 0. \quad (207)$$

Para usar a restrição (207) no algoritmo do MPC relaxado será considerado que o conjunto de pontos fixos determinado pela resposta impulso da planta será igual a r , isto é, $r = x_{set}$. Para realizar o relaxamento da restrição será realizado as seguintes manipulações algébricas: Multiplicando $(X Q_j^{-1})^T$ à esquerda e $(Q_j^{-1} X)$ à direita da eq. (207),

$$X^T Q_j^{-1} X - r^2 X^T Q_j^{-2} X \geq 0, \quad (208)$$

considerando (59) e realizando manipulações algébricas obtém-se,

$$X + X^T - Q_j - r X^T Q_j^{-2} r X \geq 0. \quad (209)$$

Dessa forma aplicando o complemento de Schur tem-se,

$$\begin{bmatrix} X + X^T - Q_j & r X^T \\ r X & Q_j^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (210)$$

em que $Q = Q^T > 0$, $X \neq X^T$ e $r_{jj} = x_{set_j}$, $j = 1, 2, \dots, n_x$.

A obtenção do conjunto de pontos fixos x_{set} foi definido inicialmente por Wan e Kothare (2003a) e neste trabalho esse conjunto de pontos fixos são utilizados como restrição como definido em (210).

Portanto o ganho do controlador *offline* com AW pode ser obtido pelo seguinte teorema

Teorema 11 *O problema de minimização*

$$\min_{u(k), Y(k), X(k), Q(k)} \zeta(k) \quad (211)$$

sujeito à, (168), (142), (169), (180), (204), (206) e (210) possui solução se todas LMIs alcançam a solução para todo tempo discreto k .

7.1.1 Algoritmo MPC *offline* com AW

Para implementação do atuador *Anti-Windup* com relaxação, faz-se o seguinte procedimento: gera-se uma sequência de minimizadores μ_{a_j} , U_{a_j} , X_{a_j} , L_{a_j} e Q_{a_j} baseado em (204). Faça $j := 1$

1. compute os minimizadores μ_{a_j} , U_{a_j} , X_{a_j} , L_{a_j} e Q_{a_j}
2. calcule o ganho *anti-windup* $F_a = L_{a_1} X_{a_1}^{-1}$.

Posteriormente para implementação do algoritmo para o controlador MPC, faz-se o seguinte procedimento: para um sistema *offline*, dado uma condição inicial $(x_{set})^1$, gera-se uma sequência de minimizadores ζ_j , Q_j , X_j , U_j , Y_j baseado em (168), (169), (180), (206) e (210). Faça $j := 1$

1. compute os minimizadores ζ_j , Q_j , X_j , U_j , Y_j , com restrição adicional de $X_{j-1} > X_j$ e $Q_{j-1} > Q_j$. Armazene Q_j^{-1} , F_j , X_j e Y_j .
2. se $j < N$ escolha o estado x_{j+1} satisfazendo $\|x_{j+1}\|_{Q^{-1}}^2 \leq 1$. Faça $j := j + 1$ e retorne ao passo 1.
3. calcule $F_j = Y_j X_j^{-1}$.
4. aplique a lei de controle $u(k) = F_j x(k) - F_a x_d(k)$.

¹A obtenção do conjunto de pontos fixos (x_{set}) é descrito em Wan e Kothare (2002).

7.2 EXEMPLO NUMÉRICO

Para verificar a eficiência da desigualdade linear proposta será realizada uma simulação numérica do controlador MPC *offline* relaxado com a restrição (210) desconsiderando por enquanto o AW. Para simulação foi utilizado o mesmo exemplo numérico descrito na sessão 5.3 com $\delta = 5$. Foi realizado uma comparação entre o MPC *offline* relaxado com a restrição (210) e o MPC *offline* relaxado sem a restrição. Obteve-se o conjunto r ,

$$r = \begin{bmatrix} -1.5000 & -0.2000 \\ -1.2382 & -0.3397 \\ -1.0393 & -0.4544 \\ -0.8671 & -0.5502 \\ -0.6728 & -0.6296 \\ -0.5216 & -0.6907 \\ -0.3854 & -0.7373 \\ -0.1963 & -0.7712 \\ 0.0631 & -0.7872 \\ 0.3434 & -0.7789 \\ 0.3869 & -0.7445 \end{bmatrix}. \quad (212)$$

O ganho do observador L obtido foi $L = [-0.6702 \ -1.4366]^T$, com $\rho = 0.6^{1/2}$ para ambos casos. Para análise será considerado dois casos:

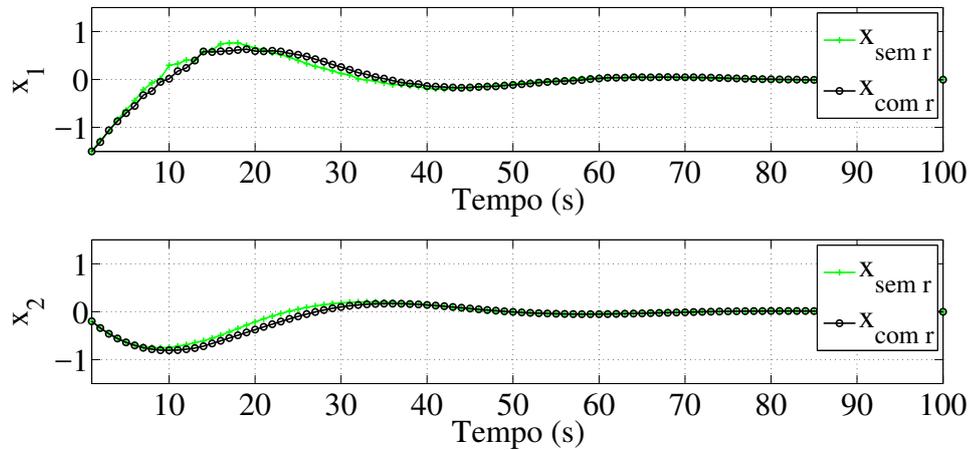
- Caso 1: sem a restrição (210), isto é, sem r ;
- Caso 2: com a restrição (210), isto é, com r ;

O ganho estático do controlador obtido para o Caso 1 foi, $F = [0.0223 \ 0.0277]$. Já no Caso 2, o ganho obtido foi, $F = [0.0594 \ 0.0764]$.

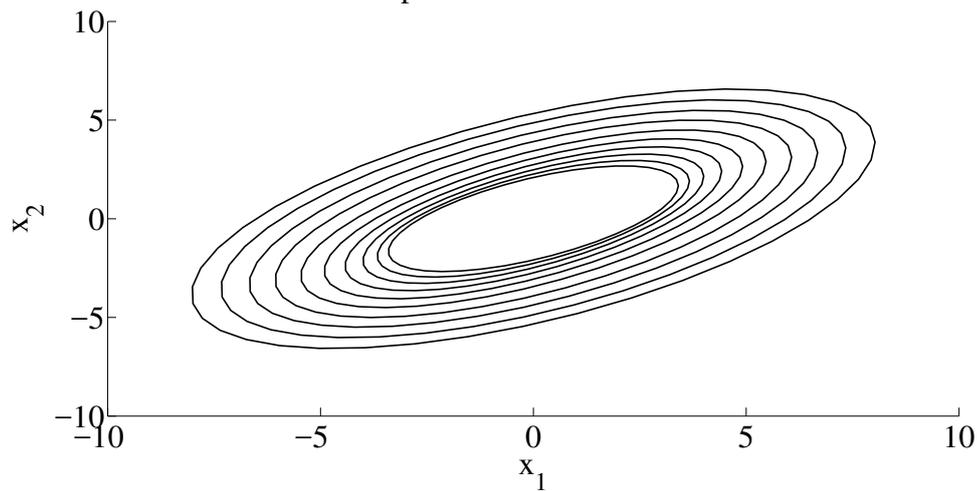
Na Figura 25 é mostrado os estados do sistema obtidos para ambos os casos. A diferença entre os sinais é mínima, entretanto é possível observar que com a restrição adicional proposta a resposta do sistema é mais rápida.

A Figura 26 mostra as elipsoides de estabilidade obtidas com matriz X^{-1} para o caso 2. X^{-1} assume um comportamento elipsoidal no plano geométrico e sua estabilidade robusta é garantida com o conjunto r em regime permanente pois as elipse convergem para origem. Quanto mais próxima da origem estive a elipse mais estável será a resposta do sistema.

Figura 25: Estados do sistema obtidos na simulação.



Fonte: Autor.

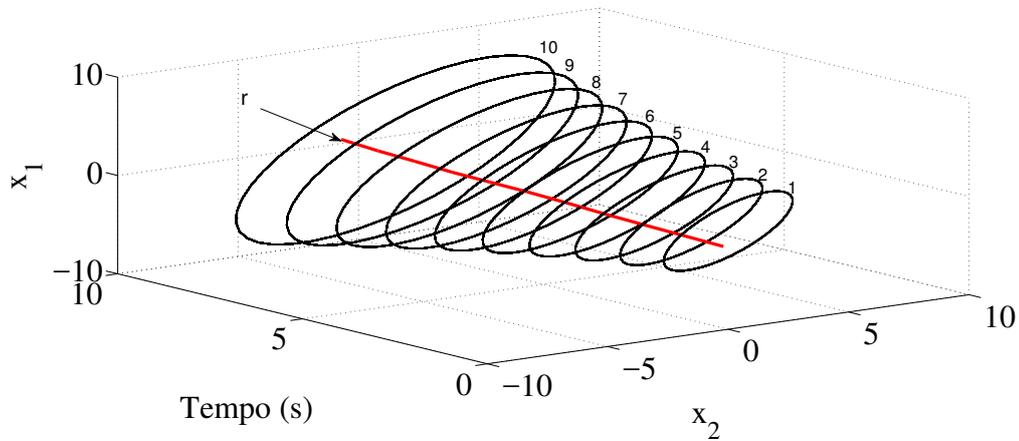
Figura 26: Elipsóides de estabilidade da matriz X^{-1} .
Elipsóides de Estabilidade

Fonte: Autor.

Na Figura 27 é mostrado a relação entre a resposta ao impulso r e as elipsóides $x_1 \times x_2$. Devido à característica oscilatória da resposta ao impulso, como visto na Figura 27, os tamanhos dos elipsóides para cada valor de N (quantidade de pontos) também podem variar de maneira oscilante, de modo que o procedimento de restrição seja obedecido. Logo, como o $N \Rightarrow \infty$, implica que o elipsóide também tende a se estabilizar como descrito em Costa *et al.* (2017). A escolha de N dentro do r assintoticamente estável é uma escolha do projetista. Neste caso fez-se $N = 10$.

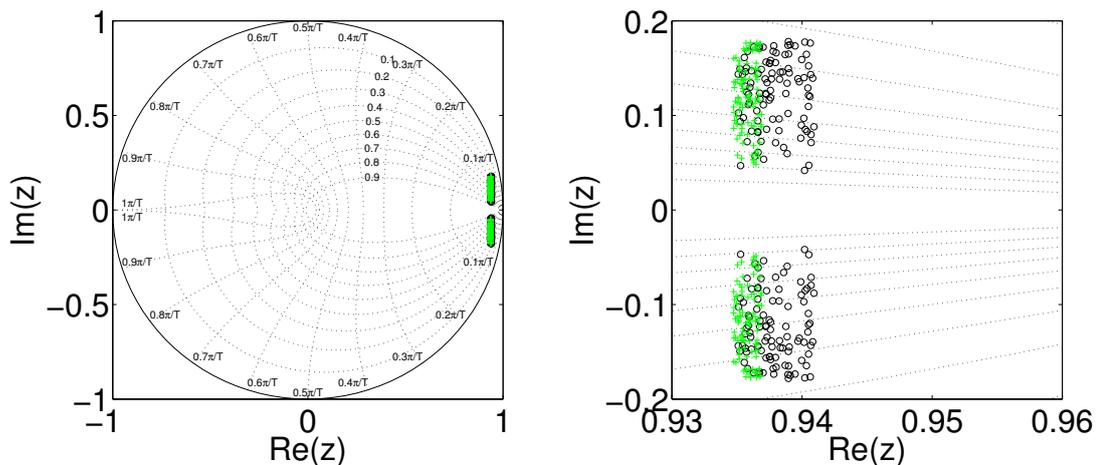
A Figura 28 mostra os polos e zeros do sistema. Portanto, é visto que no controlador relaxado do MPC *offline* com e sem a restrição a estabilidade do sistema é garantida.

Figura 27: Relação entre a resposta ao impulso r e as elipsóides $x_1 \times x_2$.
Elipsóides de Estabilidade com r



Fonte: Autor.

Figura 28: Análise dos polos e seus conjugados do sistema LPV para $\alpha \in [1, 5]$ e $\beta \in [0.1, 1]$: a) polos e seus conjugados para técnica com r (o) e sem r (+). b) zoom da alocação dos polos e seus conjugados com MPC *offline*.



(a) Círculo unitário com os polos e seus conjugados (b) Zoom no círculo unitário da alocação dos polos e seus conjugados

Fonte: Autor.

7.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO

Este capítulo apresentou o desenvolvimento do MPC *offline* em que foi proposto uma nova restrição via LMI baseado no conjunto de pontos fixos. Esta restrição garante que limite da função objetivo seja maior que um círculo de raio r_{jj} . Para mostrar a eficiência do MPC com a restrição proposta foi realizado uma simulação numérica, e os resultados obtidos comprovaram o bom desempenho do controlador. A vantagem de se utilizar o MPC *offline* é que ele permite a obtenção de um ganho estático e facilmente pode ser aplicado em uma planta experimental.

8 ANÁLISE E RESULTADOS DE SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo será apresentado os resultados das simulações numéricas aplicada na modelagem LTV com uma abordagem politópica incerta da planta do conversor *boost* com o controlador preditivo baseado em modelo proposto neste trabalho juntamente com o já existente na literatura, o qual foi discutido no capítulo 5. Apesar da planta do conversor ser LTV e controlador ser projetado para sistemas LPV, foi visto no capítulo 2 que os sistemas LPV englobam os sistemas com parâmetros variáveis no tempo também. Dessa forma, nesse capítulo será mostrado que o controle é aplicável a sistemas LTV com modelagem politópica incerta.

Para simulação, foi implementado o controlador MPC com relaxação descrito no capítulo 5, seção 5.2 juntamente com o compensador *anti-windup* relaxado descrito no capítulo 6, seção 6.2. Este foi comparado com o controlador MPC descrito no capítulo 5, seção 5.1. Em seguida, implementou-se o controlador *offline* descrito no capítulo 7, e o mesmo foi comparado com o descrito no capítulo 5, seção 5.2 juntamente com o compensador *anti-windup* relaxado.

Para simulação numérica da planta do conversor *boost* considerou-se o modelo contínuo não linear aproximado com o método numérico *Runge-Kutta 4*. Já no observador foi considerado o modelo linear discreto.

Os parâmetros utilizados para conversor podem ser vistos na tabela 1, os mesmo utilizados em Rego *et al.* (2018).

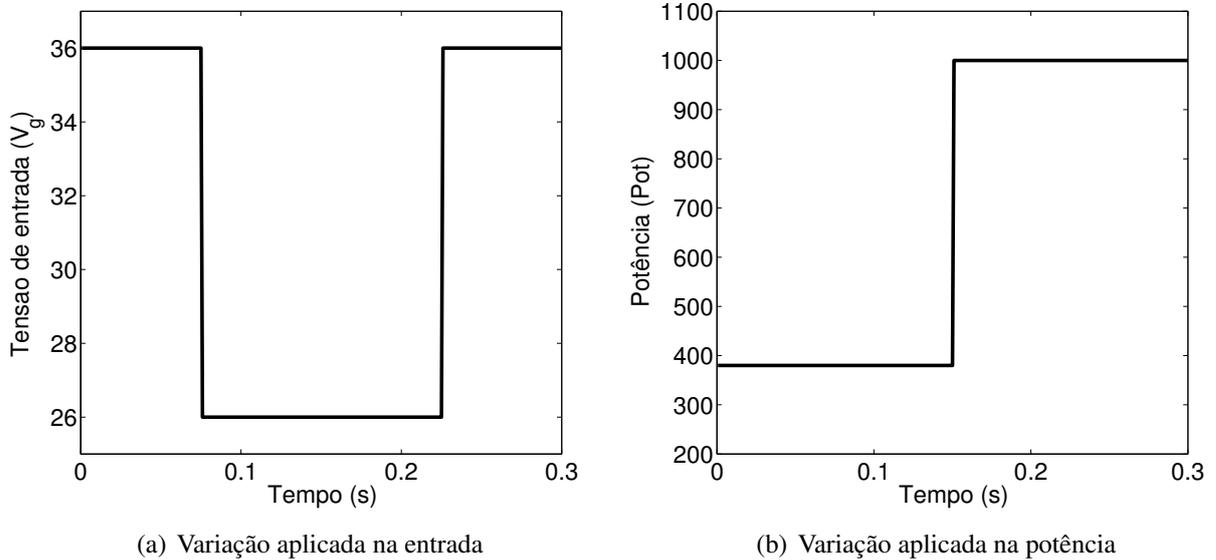
Tabela 1: Parâmetros do conversor *boost*

Parâmetros	Valores
Tensão de Entrada (V_g)	26-36[V]
Tensão de saída (V_o)	48[V]
D_{duty} Ciclo de Trabalho	0.25-0.46
Frequência de chaveamento (f_s)	22[kHz]
Indutor de Filtro (L)	36[μH]
Resistência Indutiva (R_L)	0 [Ω]
Capacitor de saída (C_o)	4400[μF]
Resistência serie (R_{co})	26.7[$m\Omega$]
Carga (R_o)	2.034-6.06 [Ω]
Potência de saída	380-1000[W]
Passo de simulação	1 μs

Foi utilizado um tempo de amostragem de $1 \times 10^{-3} s$ e foi simulado para um tempo final de 0.3s. O sinal de referência utilizado para tensão de saída foi 48V.

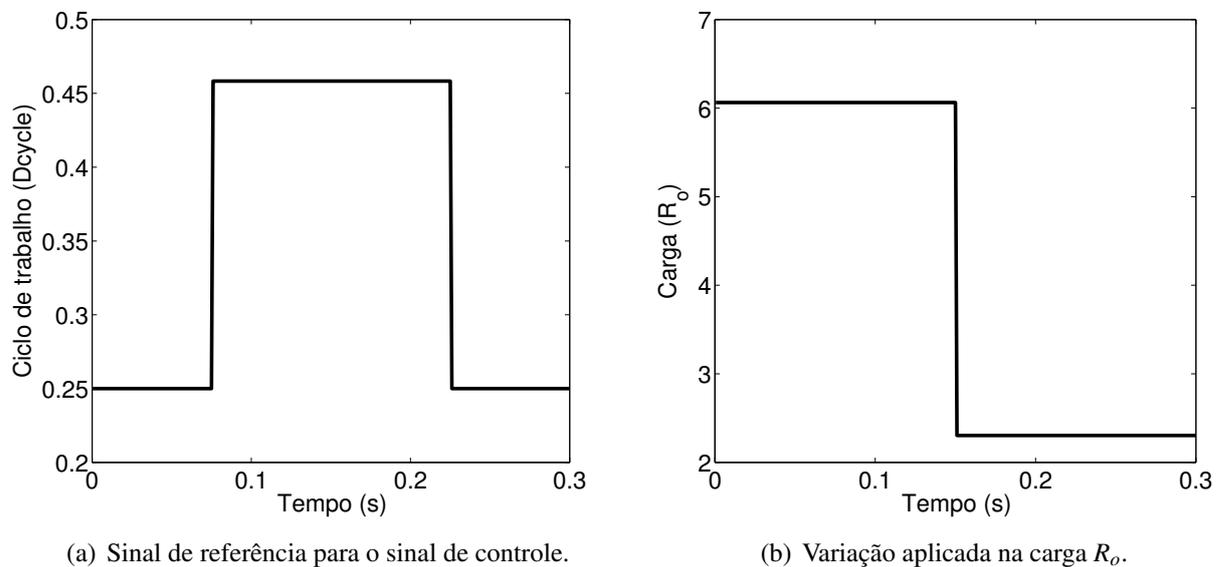
Realizou-se uma variação degrau da tensão de entrada de 26V – 36V como mostrado na Figura 29-a. Também foi realizado variações na potência (Figura 29 -b), no ciclo de trabalho (Figura 30 -a) e na carga (Figura 30 -b).

Figura 29: Condições de tensão de entrada e de potência: a) variação da tensão de entrada. b) variação na potência.



Fonte: Autor.

Figura 30: Condições do sinal de controle e carga: a) variação do ciclo de trabalho D_{cycle} . b) variação da carga.



Fonte: Autor.

Na Figura 31 tem-se a esquematização do diagrama de bloco com o *anti-windup* e estimador de estados. As matrizes $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ e $D(t)$ serão representadas apenas por A , B , C e D para simplificação, e essas são as matrizes LTV do conversor *boost*. $\hat{x}(k)$ é o estado

Os estados do sistema são dados por,

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k). \quad (219)$$

O sinal de controle $u(k)$ é comum ao sistema e ao observador de estado, e é dado por,

$$u(k) = -K\hat{x}(k) + K_I v(k) - u_d(k), \quad (220)$$

onde $\hat{x}(k)$ é estado observado definido por,

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L_o(y(k) - \hat{y}(k)). \quad (221)$$

Substituindo a eq. (220) em (221) tem-se,

$$\hat{x}(k+1) = (A - BK - L_o C)\hat{x}(k) + L_o Cx(k) + K_I Bv(k) - BK_{AW}x_d(k). \quad (222)$$

E substituindo a eq. (220) em (219),

$$x(k+1) = Ax(k) - BK\hat{x}(k) + BK_I v(k) - BK_{AW}x_d(k). \quad (223)$$

Obtemos a equação no espaço de estado do controlador com o observador e a ação integral dada por,

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \hat{x}(k+1) \\ v(k+1) \\ x_d(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK & BK_I & -BK_{AW} \\ L_o C & (A - BK - L_o C) & BK_I & -BK_{AW} \\ -hC & hDK & g - hK_I D & hC \\ 0 & 0 & 0 & (A + B)K_{AW} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \\ v(k) \\ x_d(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \\ 0 \end{bmatrix} r(k), \quad (224)$$

A saída do sistema e do observador de estado é dada por $y(k)$ e $\hat{y}(k)$ respectivamente,

$$y(k) = Cx(k) + Du(k), \quad (225)$$

$$\hat{y}(k) = C\hat{x}(k) + Du(k). \quad (226)$$

As matrizes A , B , C e D pertencem a um polítopo convexo com $Pot \in [380 \ 1000]W$ e $V_g \in [26 \ 36]V$ formado pelos quatro modelos discretos locais,

- $f(36V, 1000W)$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.2838 & -7.7479 \\ 0.0634 & -0.1137 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 580.4780 \\ 65.2800 \end{bmatrix}, \quad (227)$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0.0198 & 0.9886 \end{bmatrix}, D_1 = -0.7304.$$

- $f(26V, 1000W)$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.0958 & -8.4507 \\ 0.0692 & 0.2660 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 851.9920 \\ 53.4470 \end{bmatrix}, \quad (228)$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0.0143 & 0.9886 \end{bmatrix}, D_2 = -1.0054.$$

- $f(36V, 380W)$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.3102 & -7.9646 \\ 0.0652 & -0.1119 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 542.7340 \\ 68.8140 \end{bmatrix}, \quad (229)$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0.0199 & 0.9956 \end{bmatrix}, D_3 = -0.2802.$$

- $f(26V, 380W)$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0.0759 & -8.7329 \\ 0.0715 & 0.02873 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 814.2740 \\ 58.5880 \end{bmatrix}, \quad (230)$$

$$C_4 = \begin{bmatrix} 0.0144 & 0.9956 \end{bmatrix}, D_4 = -0.3871.$$

Os ganhos que correspondem ao grau de liberdade aplicado ao ganho integrativo foram $g = 1$ e $h = 1$. Consideram o ponto de operação $f(36V, 1000W)$ as expressões do atuador *anti-windup* são definidas por,

$$\begin{aligned} x_d(k+1) &= (A_1 + B_1 K_{AW})x_d(k) + B_1 \tilde{u}(k) \\ u_d(k+1) &= K_{AW}x_d(k) \\ y_d(k) &= (C_1 + D_1 K_{AW})x_d(k) + D_1 \tilde{u}(k). \end{aligned} \quad (231)$$

Nas próximas subsecções serão apresentados os resultados das simulações numérica.

8.1 CONTROLADOR MPC-AW-RELAXADO VERSUS MPC

Nesta seção será apresentado os resultados comparativos entre o *output feedback* MPC proposto por Park, Kim e Sugie (2011) e o *output feedback* MPC relaxado com *anti-windup* relaxado ($MPC - AW_{relax}$) proposto neste trabalho.

Para simulação considerou-se as matrizes ganhos do MPC,

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R = 0.1. \quad (232)$$

E a matriz ganho para o observado,

$$L_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \rho = \sqrt{0.6}. \quad (233)$$

Os estados iniciais para o sistema utilizado foi $x = [(1000/26), 26, 0]^T$ e para o observador $\hat{x} = [30, 20]^T$. Os ganhos obtidos na simulação MPC não são ganhos estáticos, isto é, a cada iteração o ganho pode variar. Dessa forma, os ganhos exibidos aqui são os obtidos na primeira iteração ($j = 1$).

Para o MPC proposto por Park, Kim e Sugie (2011) os ganhos são:

$$F_j = K_{MPC} = \underbrace{[0.0179 \quad -0.7031]}_K \underbrace{[-0.1134]}_{K_I} \times 10^{-2} \quad (234)$$

$$K_L = [-8.297718 \quad 0.077676]^T \quad (235)$$

onde K_{MPC} é o ganho do controlador e K_L é o ganho do observador.

E os ganhos obtidos para a simulação MPC-AW-relaxado aqui propostos são:

$$K_{AW_{relaxado}} = [-0.0534 \quad 0.3399] \times 10^{-2} \quad (236)$$

$$K_{MPC_{relaxado}} = \underbrace{[0.0193 \quad -0.7180]}_K \underbrace{[-0.1195]}_{K_I} \times 10^{-2} \quad (237)$$

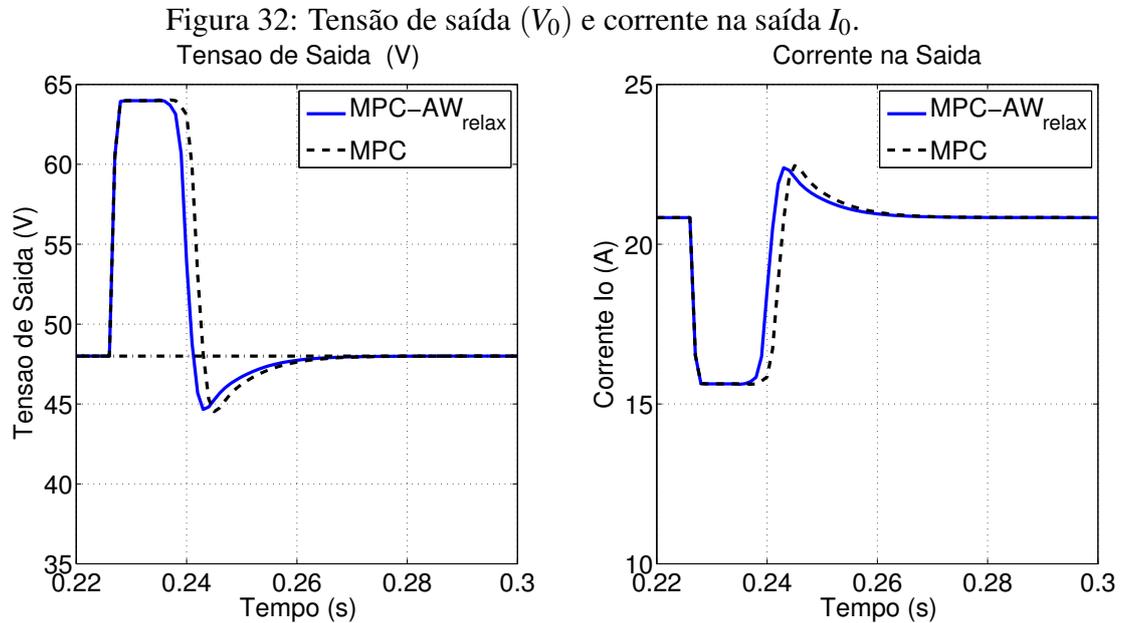
$$K_{L_{relaxado}} = [-8.295419 \quad 0.077676]^T \quad (238)$$

onde $K_{AW_{relaxado}}$ é o ganho *anti-windup*, $K_{MPC_{relaxado}}$ é o ganho do controlador e $K_{L_{relaxado}}$ é o ganho do observador.

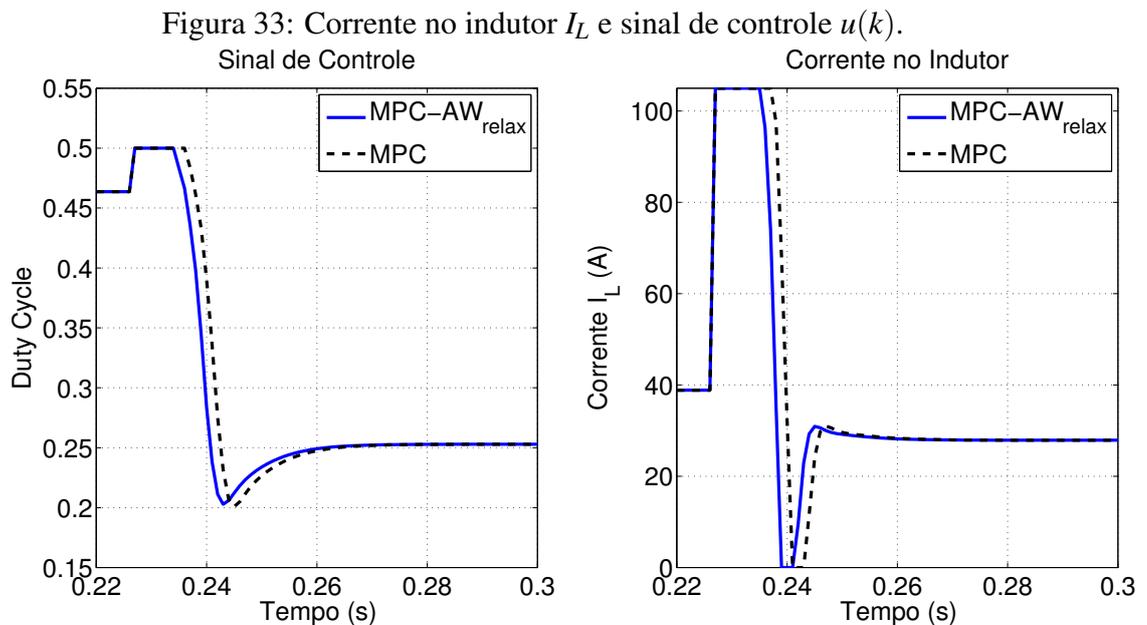
Para uma melhor visualização do desempenho dos controladores, considerou-se os intervalos de tempo de 0.22s à 0.3s.

Na Figura 32 tem-se a tensão de saída V_o e a corrente na saída. É possível vê que

os controles conseguem seguir a referência. Entretanto o $MPC - AW_{relax}$ apresenta melhores resultados se comparado com o MPC . Isto é, o sistema de controle com atuador AW possui uma recuperação de regime mais rápida que o circuito operando sem o AW.



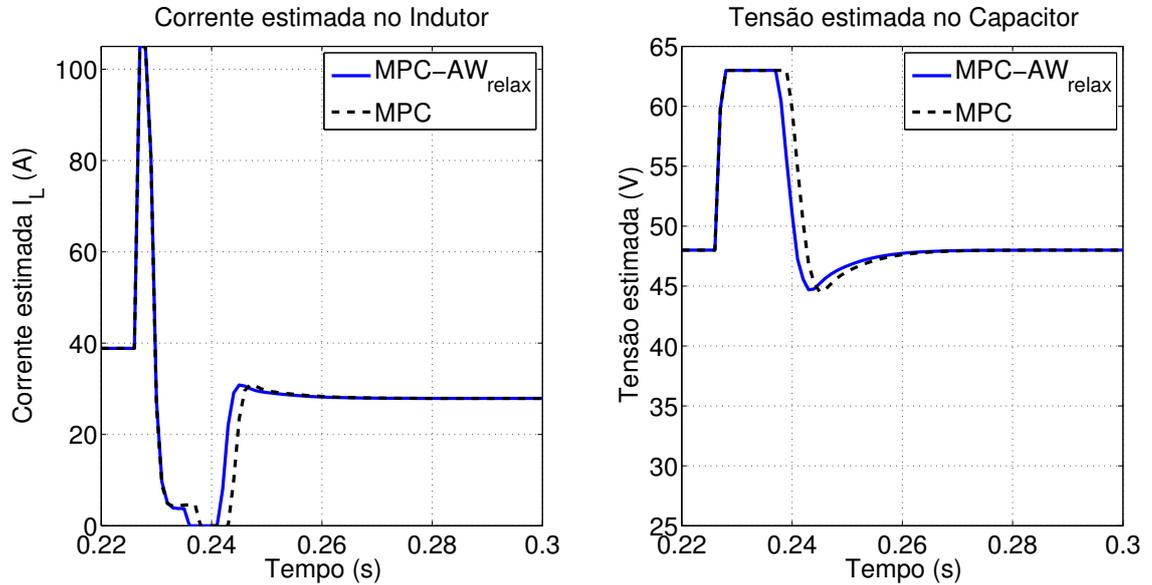
Na Figura 33 tem-se o sinal de controle $u(k)$ e a corrente no indutor I_L . É possível vê que para ambas técnicas de controle a restrição $u_{max} = 0.5$ foi atendida.



Já na Figura 34 tem-se a corrente no indutor estimada e a tensão no capacitor estimada obtidas com o observador. Apesar de ambas as estratégias atingirem um pico de corrente no

indutor instantânea de cerca de 105A, o controlador $MPC - AW_{relax}$ começa a atuar instantes depois de atingida a corrente de pico, diferente do modelo controlado apenas pelo controle MPC.

Figura 34: Tensão e corrente estimadas.



Portanto, foi possível constatar que a técnica proposta $MPC - AW_{relax}$ mostrou-se mais eficaz que o controle operando apenas com MPC proposto por Park, Kim e Sugie (2011), Kim e Lee (2017), considerando as condições saturadas de operação de modo a evitar o *overlapping* o qual o conversor não foi projetado. Acrescenta-se ainda que, a estratégia AW aplicada na atuação do sinal de controle permite o uso racional do conversor, evitando que a saturação prejudique seu desempenho em regime permanente.

8.2 CONTROLADOR MPC-AW-RELAXADO-ONLINE VERSUS MPC-AW-RELAXADO-OFFLINE

Nesta seção será apresentado os resultados comparativos entre o controle preditivo relaxado com *anti-windup* relaxado proposto o qual sera designado por (*MPC – online*) e o MPC *offline* com AW relaxado (*MPC – offline*) descrito no capítulo 7. Para averiguar os princípios da estabilidade assintótica robusta do processo *offline* será realizado a análise das elipsoides de estabilidades.

Para simulação considerou-se as matrizes ganhos do MPC,

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R = 0.1. \quad (239)$$

E a matriz ganho para o observado,

$$L_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \rho = \sqrt{0.6}. \quad (240)$$

Os estados iniciais, $x = [(1000/26), 26, 0]^T$ e para o observador $\hat{x} = [30, 20]^T$. Os ganhos obtidos na simulação *MPC – online* são:

$$K_{MPC-online} = \underbrace{[0.0193 \quad -0.7180]}_K \underbrace{[-0.1195]}_{K_I} \times 10^{-2}, \quad (241)$$

$$K_{AWonline} = [-0.0534 \quad 3.3990] \times 10^{-2}, \quad (242)$$

$$K_{Lonline} = [-8.295419 \quad 0.077676]^T \quad (243)$$

onde $K_{AWonline}$ é o ganho *anti-windup*, $K_{Lonline}$ é o ganho do observador e $K_{MPC-online}$ é o ganho do controlador. No processo *online* o ganho pode variar a cada iteração, assim o respectivo ganho ($K_{MPC-online}$) foi obtido na primeira iteração.

Os ganhos obtidos na simulação *MPC – offline* são:

$$K_{MPC-offline} = \underbrace{[-0.0051 \quad -0.2062]}_K \underbrace{[-0.1494]}_{K_I} \times 10^{-2}, \quad (244)$$

$$K_{AWoffline} = [-0.0534 \quad 3.3990] \times 10^{-2}, \quad (245)$$

$$K_{Loffline} = [-8.295419 \quad 0.077676]^T \quad (246)$$

em que $K_{MPC-offline}$ é o ganho do controlador, $K_{AW-offline}$ é o ganho *anti-windup* e $K_{L-offline}$ é o ganho do observador.

Na Figura 35 tem-se a tensão de saída V_o . A linha contínua preta é o sinal obtido com o controlador MPC *online* e a linha azul +, é o sinal obtido com o controlador MPC *offline*. Ambos controladores seguiram a tensão de referência pre estabelecida. A diferença entre os sinais é mínima, entretanto, é possível vê que o controlador *online* proporcionou uma resposta levemente mais rápida.

Figura 35: Tensão de saída $y(k) = V_o$.

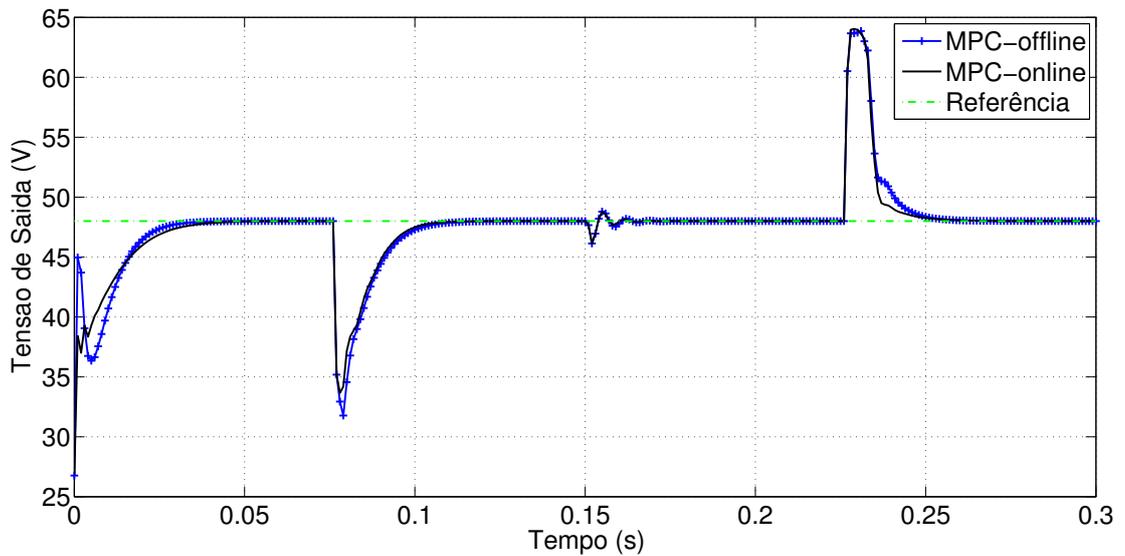
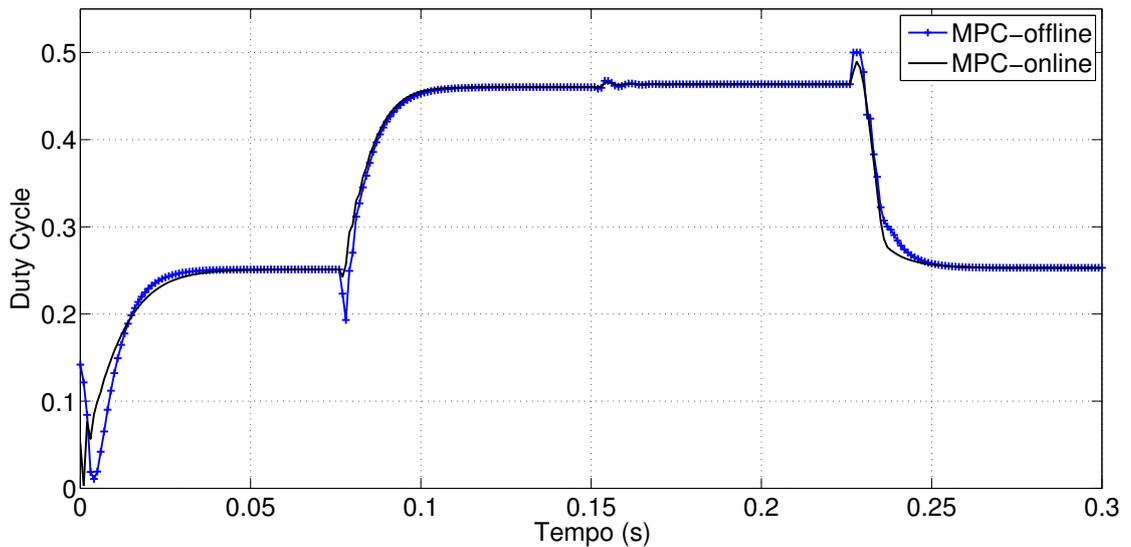


Figura 36: Sinal de controle $u(k)$.

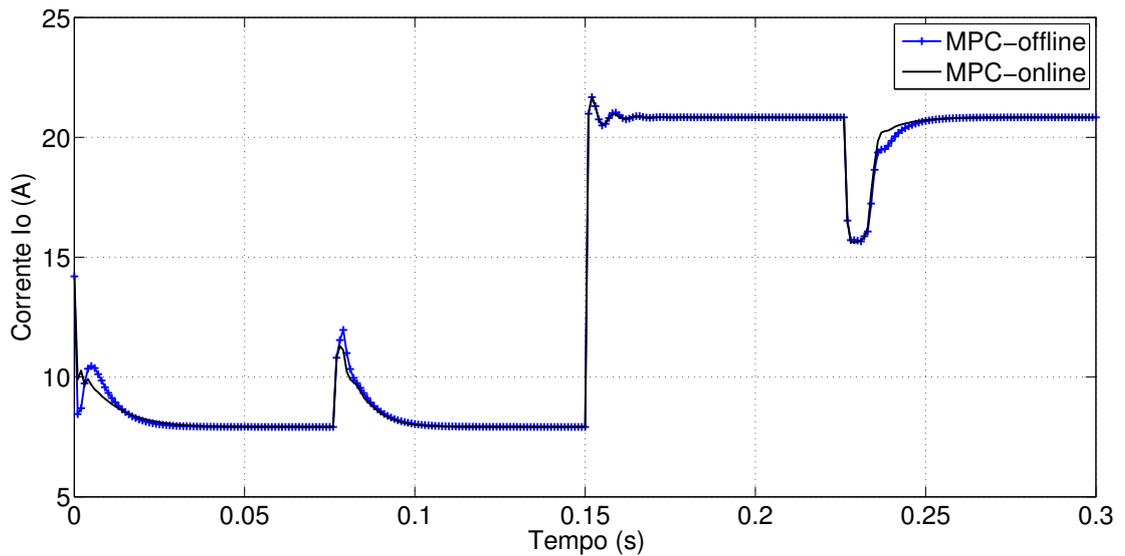


Na Figura 36 tem-se o sinal de controle $u(k)$. É possível vê que para ambas técnicas

de controle a restrição $u_{max} = 0.5$ foi atendida. O controlador MPC *offline* apresenta um maior *overshoot*, quando comparado com o controlador *online*.

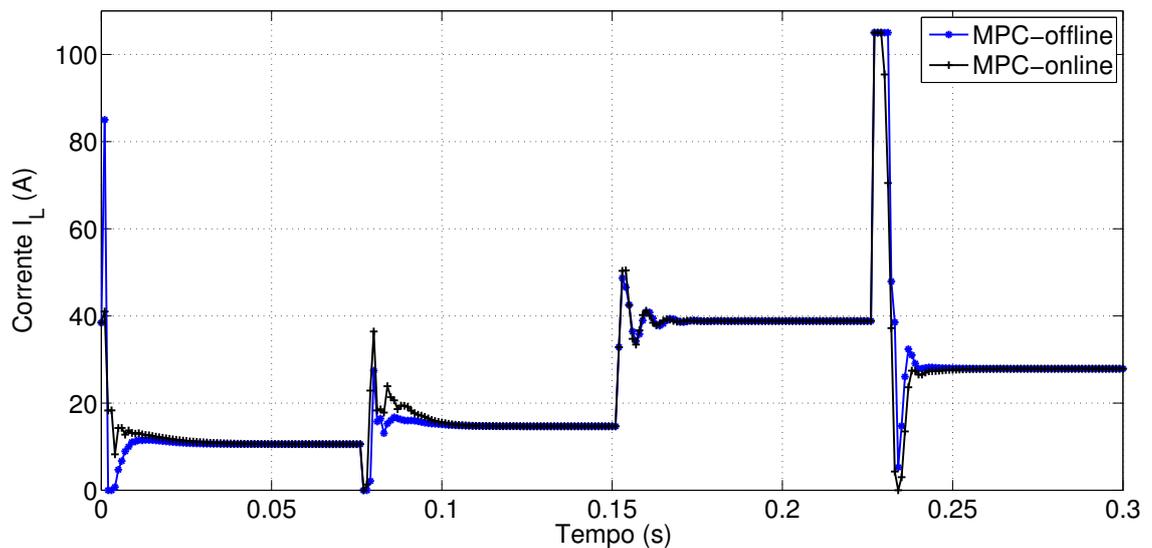
Na Figura 37 tem-se a corrente na saída (I_0), obtida via implementação *online* e *offline* do controlador MPC. Ambos os sinais são semelhantes. Pode-se observar que o controlador projetado apresenta bons resultados mesmo sob perturbações variantes no tempo.

Figura 37: Corrente na saída I_0 .



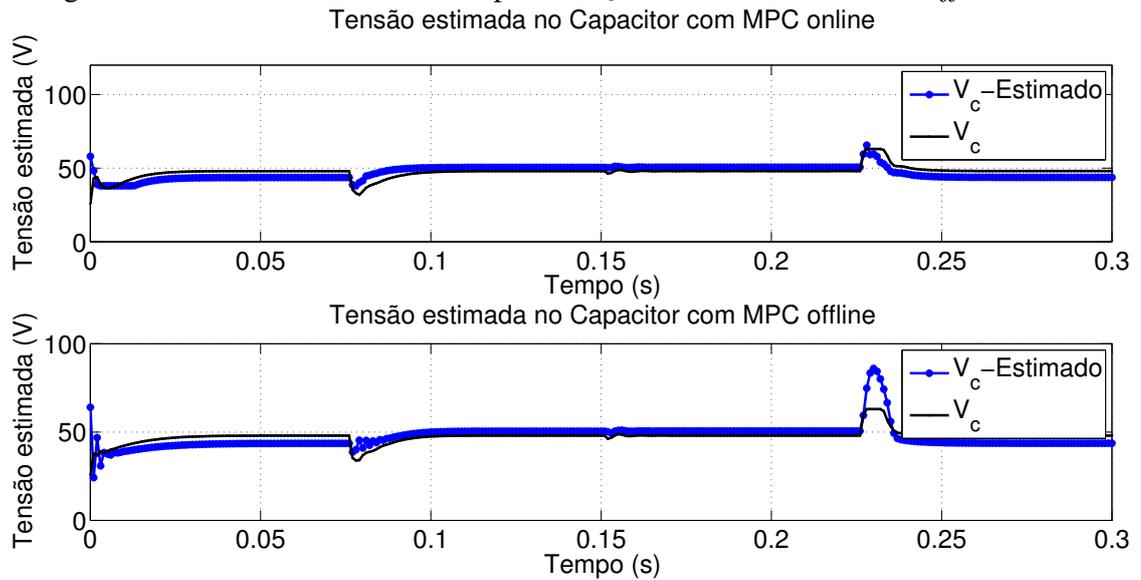
Na Figura 38 tem-se a corrente no indutor (I_L) obtida via implementação *online* e *offline*. O algoritmo MPC *offline* fornece desempenho semelhante ao do algoritmo MPC *online*.

Figura 38: Corrente no indutor I_L .



Na Figura 39 tem-se os estados estimados referente a tensão no capacitor. A tensão no capacitor no processo *online* apresentou um resultado relativamente superior a obtida no processo *offline*. Isso ocorre, porque no processo *online* o ganho varia a cada iteração, no entanto requer um maior tempo de processamento. Diferente do processo *offline* em que obtém-se um ganho estático, pois este faz o uso de uma *look table* baseado no conjunto de pontos x_{set} e a carga computacional é reduzida.

Figura 39: Tensões estimadas no capacitor V_c com o método *online* e *offline*.



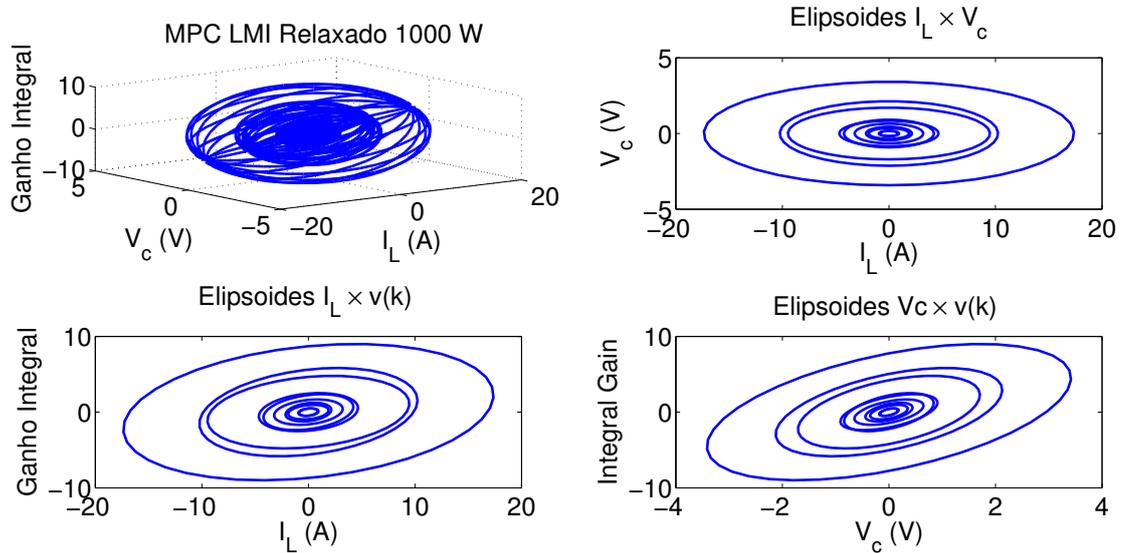
A Figura 40 apresenta as elipsoides de estabilidades definidas por X^{-1} para 10 pontos discreto ($x_{set} = [22.5856, 8.4432, -15.1775, 1.6135, 7.3028, 3.7472, -2.3329, 2.8886, 0.0729, -1.5409]$) obtidos via implementação *offline* do MPC. X^{-1} assume comportamento elipsoidal no plano geométrico e a sua estabilidade robusta é garantida com o conjunto x_{set} em regime permanente.

Ainda na Figura 40 tem-se a projeção 3D referente à relação entre $i_L \times V_c \times v(k)$ e as projeções 2D para as perspectivas 2 a 2 para cada variável de estado envolvida no processo de otimização. Observa-se que a matriz X tem dimensões 3×3 baseada no modelo expandido do espaço de estados. Portanto, a construção gráfica do sistema será um conjunto de elipsóides 3D, como visto na Figura.

A resposta ao impulso do conversor *boost* consiste de uma condição de pior caso, porque sua característica oscilatória requer mais esforço do processo de otimização LMI (COSTA, 2017). No entanto, o processo de otimização do MPC *feedback* de saída *offline* garante a estabilização. Como mostrado na Figura 40 os tamanhos dos elipsóides para cada valor de N (em que N é quantidade de pontos no conjunto x_{set}) também podem variar de maneira oscilante, de modo que o procedimento de restrição seja obedecido. Logo, como o $N \Rightarrow \infty$, implica que a elipsóide tende a estabilizar. Deve-se escolher dentre o conjunto x_{set} o ganho que melhor atende as especificações

e necessidades de implementação. Recomenda-se escolher o n -ésimo valor, já que o resultado encontra-se em uma condição de norma estável do ganho (COSTA, 2017; WAN; KOTHARE, 2002).

Figura 40: Elipsoides de Estabilidade



8.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO

Neste capítulo foi apresentado os resultados das simulações dos controladores MPC proposto. Para testar o desempenho dos controladores a planta do conversor *boost* foi utilizada. Na primeira seção foi comparado o controle MPC relaxado com *anti-windup* relaxado e o controle MPC. Foi visto que a processo com AW relaxado apresentou resultados superiores, com uma resposta de controle mais rápida.

Na segunda seção foi apresentado os resultados entre os processos iterativos *online* e *offline*. Foi visto que o processo iterativo *offline* garante os mesmos princípios da estabilidade assintótica robusta do processo *online*. A vantagem em se utilizar o processo *offline* é que este método não requer tanto processamento quanto o método *online*. Podendo assim ser facilmente aplicado em uma planta experimental.

9 CONCLUSÃO

Foi apresentado um procedimento de melhoria para o controle robusto MPC com restrições para sistemas que utilizam abordagem politópica incerta baseado no algoritmo *quasi-min-max* com relaxamento nas LMIs. A ideia da técnica proposta é aumentar a região da solução do modelo incerto. Uma solução menos conservadora foi obtida usando o relaxamento das LMIs. Como mostrado no exemplo numérico do capítulo 5, se aumentarmos a região dos parâmetros incertos, o MPC relaxado continua garantindo uma solução estável e viável. Além da proposta de relaxação na LMI do controlador, no trabalho foi proposto também a utilização do controle MPC com um atuador *anti-windup* para evitar que o sinal de controle entre na região de saturação.

Na prática o sinal de controle fica com um valor diferente do sinal que realmente atua na planta, isto é, o sinal de controle fica na região de saturação, o que não é desejado pois ocorre uma deterioração do desempenho do sistema. Esse fenômeno é conhecido como *windup*. De modo a evitar que o sinal de controle entre na região de saturação foi visto que existe uma técnica conhecida como *anti-windup* (AW). Dessa forma, neste trabalho fez-se o uso da técnica *anti-windup* proposta por Turner, Herrmann e Postlethwaite (2003), Rego *et al.* (2018) para contornar as condições de saturação que ocorre quando o sinal de controle opera em uma região tal que exista a condução simultânea de duas ou mais chaves defasadas entre si. Assim, também foi proposto uma relaxação nesta técnica com a finalidade de aumentar a região da solução do modelo, igualmente como foi realizado no controlador. Os resultados do exemplo numérico exibidos no capítulo 6 comprovaram a eficiência do AW relaxado.

A proposta final foi aplicar esse controle na planta do conversor *boost* com condições de saturação, já que esta técnica de controle mostrou ser um tipo de controle bastante robusto na maioria das aplicações em conversores estáticos e em dispositivos de acionamentos elétricos de acordo com Costa (2017). O *anti-windup* relaxado foi utilizado em conjunto com o controlador preditivo baseado em modelo relaxado. E para verificar o desempenho dos métodos foi utilizado uma modelagem baseado em uma abordagem politópica incerta para planta do conversor *boost*. As simulações mostram o bom desempenho do controlador quando comparado com um MPC da literatura. Porém, uma desvantagem em se utilizar o MPC descrito, é que a lei de controle necessita ser atualizada a cada iteração tornando assim o procedimento do cálculo do controlador um processo *online*.

Pensando no desenvolvimento de um modelo *offline* do controlador como base para aplicação em planta experimental, foi proposto uma formulação *offline* do MPC relaxado com garantia de estabilidade robusta no sistema baseado em uma abordagem politópica incerta de malha fechada como visto no capítulo 7. A vantagem deste algoritmo é que ele fornece uma lei de controle *offline* correspondendo a um conjunto de elipsoides invariantes de estabilidades baseado em uma tabela de ganhos denominada *look table*. Os resultados do exemplo numérico obtidos no capítulo 7 mostraram que a restrição matricial relaxada adicionada ao controle *offline*

obteve bons resultados.

O MPC *output feedback offline* juntamente com o compensador *anti-windup* relaxado foi aplicado na planta do conversor e foi visto que a implementação *offline* apresentou pouca ou nenhuma perda de desempenho quando comparada com a implementação *online*. Isso faz com que o MPC robusto *offline* seja uma metodologia de controle muito atraente para aplicação para sistemas incertos e processo em grande escala podendo ser inserido em um microcontrolador comercial de amplo acesso, pois o seu desempenho é consideravelmente rápido quando implementado *offline*.

9.1 TRABALHOS FUTUROS

Para trabalho futuros, pretende-se realizar a aplicação experimental do controlador na planta do conversor *boost*, de modo a verificar o desempenho do controle quando o conversor esta funcionando próximo às condições críticas de operação. E outra proposta é trabalhar com o controle MPC chaveado, de modo a projetar um controlador mais adequado para sistemas chaveados, como o modelo do conversor *boost* e propor o controle *output feedback* MPC com *fuzzy* de modo a analisar o desempenho sob modelos LMI com compensação paralela distribuída (*Parallel Distributed Compensator* - PDC).

REFERÊNCIAS

- ABBAS, H. S. *et al.* An improved robust model predictive control for linear parameter-varying input-output models. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, Wiley, v. 28, n. 3, p. 859–880, aug 2017.
- ABBAS, H. S. *et al.* A robust mpc for input-output lpv models. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 61, n. 12, p. 4183–4188, 2016.
- ADEGBEGE, A. A.; LEVENSON, R. M. Linear multivariable antiwindup control design: Singular perturbation approach. **IFAC-PapersOnLine**, Elsevier, v. 50, n. 2, p. 289–294, 2017.
- AFONSO, R. J. M.; GALVÃO, R. K. H. Infeasibility handling in constrained mpc. In: **Frontiers of Model Predictive Control**. [*S.l.*]: InTech, 2012.
- AGUIRRE, L. A. *et al.* **Enciclopédia de automática: controle e automação**. [*S.l.*]: Blucher, 2007.
- ARAÚJO, C. D. **Identificação e Controle de algumas classes de sistemas nãoestacionários**. Tese (Doutorado) — Tese de Doutorado, PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2006.
- BASCOPE, G. T.; BARBI, I. Generation of a family of non-isolated dc-dc pwm converters using new three-state switching cells. In: IEEE. **Power Electronics Specialists Conference, 2000. PESC 00. 2000 IEEE 31st Annual**. [*S.l.*], 2000. v. 2, p. 858–863.
- BOURLÈS, H.; MARINESCU, B. **Linear Time-Varying Systems: Algebraic-Analytic Approach**. [*S.l.*]: Springer, 2011. v. 410.
- BRIAT, C. Linear parameter-varying and time-delay systems. **Analysis, observation, filtering & control**, Springer, v. 3, 2014.
- CAMACHO, E. F.; ALBA, C. B. **Model predictive control**. [*S.l.*]: Springer Science & Business Media, 2013.
- CAO, Y.-Y.; LIN, Z. Min–max MPC algorithm for LPV systems subject to input saturation. **IEE Proceedings - Control Theory and Applications**, Institution of Engineering and Technology (IET), v. 152, n. 3, p. 266–272, may 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1049/ip-cta:20041314>>.
- CHENG, L. *et al.* Model predictive control for dc-dc boost converters with reduced-prediction horizon and constant switching frequency. **IEEE Transactions on Power Electronics**, IEEE, 2017.
- CLAEYS, M.; DAAFOUZ, J.; HENRION, D. Modal occupation measures and lmi relaxations for nonlinear switched systems control. **Automatica**, Elsevier, v. 64, p. 143–154, 2016.
- COSTA, M. V. *et al.* Controlador robusto mpc-lmi aplicado ao conversor boost com célula de comutação de três estados. **Eletrônica de Potência, Campo Grande**, p. 81–90, 2017.

COSTA, M. V. S. **Controladores Robustos D-LQI e D-Alocação de polos Otimizados via LMI Aplicados a um Conversor Boost Alto Ganho com Célula de Comutação Três Estados**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2012. 120f.

COSTA, M. V. S. **Controle MPC robusto aplicado ao conversor *boost* CCTE otimizado por inequações matriciais lineares**. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017.

COX, P. B.; TÓTH, R. Lpv state-space model identification in the bayesian setting: A 3-step procedure. In: IEEE. **2016 American Control Conference (ACC)**. [*S.l.*], 2016. p. 4604–4610.

CUTLER, C. R.; RAMAKER, B. L. Dynamic matrix control: A computer control algorithm. In: **joint automatic control conference**. [*S.l.*: *s.n.*], 1980. p. 72.

CUZZOLA, F. A.; GEROMEL, J. C.; MORARI, M. An improved approach for constrained robust model predictive control. **Automatica**, Elsevier, v. 38, n. 7, p. 1183–1189, 2002.

DESOER, C. A.; VIDYASAGAR, M. **Feedback systems: input-output properties**. [*S.l.*]: Siam, 1975. v. 55.

DING, B.; WANG, P.; HU, J. Dynamic output feedback robust mpc with one free control move for lpv model with bounded disturbance. **Asian Journal of Control**, Wiley Online Library, v. 20, n. 2, p. 755–767, 2018.

DING, B. *et al.* Dynamic output feedback robust mpc with relaxed constraint handling for lpv system with bounded disturbance. In: IEEE. **Intelligent Control and Automation (WCICA), 2014 11th World Congress on**. [*S.l.*], 2014. p. 2624–2629.

DONÁ, J. A. D.; GOODWIN, G. C.; SERON, M. M. Anti-windup and model predictive control: Reflections and connections. **European Journal of Control**, Elsevier, v. 6, n. 5, p. 467–477, 2000.

DOYLE, J. Guaranteed margins for lqg regulators. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 23, n. 4, p. 756–757, 1978.

GAHINET, P. *et al.* Lmi control toolbox users guide, natick: Mathworks. **Inc. P. Gahinet**, 1995.

GAO, X. **Control for TS fuzzy systems based on LMI optimization**. Tese (Doutorado) — Dissertation, Jilin University, 2006.

GULDEMIR, H. Modeling and sliding mode control of dc-dc buck-boost converter. In: **Proc. 6th Int. advanced technological Symp.** [*S.l.*: *s.n.*], 2011. v. 4, p. 475–480.

HANEMA, J.; LAZAR, M.; TÓTH, R. Tube-based lpv constant output reference tracking mpc with error bound. **IFAC-PapersOnLine**, Elsevier, v. 50, n. 1, p. 8612–8617, 2017.

HE, D.; SUN, Y.; NI, H. Input-to-state stable mpc algorithms for constrained lpv systems. In: IEEE. **Control and Decision Conference (CCDC), 2016 Chinese**. [*S.l.*], 2016. p. 4060–4065.

HERRMANN, G.; TURNER, M. C.; POSTLETHWAITE, I. Discrete-time anti-windup: Part 2—extension to the sampled-data case. In: IEEE. **European Control Conference (ECC), 2003**. [*S.l.*], 2003. p. 479–484.

- JAADARI, A. **Continuous quasi-LPV Systems: how to leave the quadratic framework?** Tese (Doutorado) — Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, 2013.
- JOHANSSON, M.; RANTZER, A.; ARZEN, K.-E. Piecewise quadratic stability of fuzzy systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, IEEE, v. 7, n. 6, p. 713–722, 1999.
- KHALIL, H. K. Nonlinear systems. **Prentice-Hall, New Jersey**, v. 2, n. 5, p. 5–1, 1996.
- KIM, T.-H.; LEE, H.-W. Quasi-min-max output-feedback model predictive control for lpv systems with input saturation. **International Journal of Control, Automation and Systems**, Springer, v. 15, n. 3, p. 1069–1076, 2017.
- KOTHARE, M. V.; BALAKRISHNAN, V.; MORARI, M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. **Automatica**, Elsevier, v. 32, n. 10, p. 1361–1379, 1996.
- KWONG, W. **Introdução ao Controle Preditivo com Matlab**. [*S.l.*]: São Paulo–SP, Ed. EdUFSCar, 2005.
- LAMRABET, O.; TISSIR, E. H.; HAOUSSI, F. E. Anti-windup compensator synthesis for sampled-data delay systems. **Circuits, Systems, and Signal Processing**, Springer, p. 1–17, 2018.
- LATAIRE, J. **Frequency domain measurement and identification of linear, time-varying systems**. Tese (Doutorado) — PhD thesis, Vrije Universiteit Brussel, University Press, Zelzate, 2011.
- LAWRENCE, D. A.; RUGH, W. J. Gain scheduling dynamic linear controllers for a nonlinear plant. In: IEEE. **Decision and Control, 1993., Proceedings of the 32nd IEEE Conference on**. [*S.l.*], 1993. p. 1024–1029.
- LEE, H.; CHOI, J. Ackermann-like eigenvalue assignment formulae for linear time-varying systems. **IEE Proceedings-Control Theory and Applications**, IET, v. 152, n. 4, p. 427–434, 2005.
- LEE, S. *et al.* Robust model predictive control for lpv systems using relaxation matrices. **IET Control Theory & Applications**, IET, v. 1, n. 6, p. 1567–1573, 2007.
- LIM, S. **Analysis and control of linear parameter-varying systems**. [*S.l.*]: Citeseer, 1999.
- LINARES-FLORES, J. *et al.* Robust nonlinear adaptive control of a boost converter via algebraic parameter identification. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, IEEE, v. 61, n. 8, p. 4105–4114, 2014.
- LÖFBERG, J. **Minimax approaches to robust model predictive control**. [*S.l.*]: Linköping University Electronic Press, 2003. v. 812.
- LONGGE, Z.; YAN, Y. Robust shrinking ellipsoid model predictive control for linear parameter varying system. **PLOS ONE**, Public Library of Science (PLoS), v. 12, n. 6, p. e0178625, jun 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1371/journal.pone.0178625>>.
- LU, Y.; ARKUN, Y. Quasi-min-max mpc algorithms for lpv systems. **Automatica**, Elsevier, v. 36, n. 4, p. 527–540, 2000.

MAO, W.-J. Robust stabilization of uncertain time-varying discrete systems and comments on “an improved approach for constrained robust model predictive control”. **Automatica**, Elsevier, v. 39, n. 6, p. 1109–1112, 2003.

MAZONI, A. F. **Estudo de técnicas de controle H-infinito para estruturas flexíveis com intercentezas**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Estadual de Campinas, 2008.

MELO, F. E. M. **Modeling and linear parameter-varying identification of a two-tank system**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal do Ceará, 2017.

MIDDLEBROOK, R.; CUK, S. A general unified approach to modelling switching-converter power stages. In: IEEE. **Power Electronics Specialists Conference, 1976 IEEE**. [*S.l.*], 1976. p. 18–34.

MORARI, M.; LEE, J. H. Model predictive control: past, present and future. **Computers & Chemical Engineering**, Elsevier, v. 23, n. 4-5, p. 667–682, 1999.

OLALLA, C. *et al.* Robust gain-scheduled control of switched-mode dc–dc converters. **IEEE Transactions on Power Electronics**, IEEE, v. 27, n. 6, p. 3006–3019, 2012.

ORTEGA, R. *et al.* **Passivity-based control of Euler-Lagrange systems: mechanical, electrical and electromechanical applications**. [*S.l.*]: Springer Science & Business Media, 2013.

PARK, J.-H.; KIM, T.-H.; SUGIE, T. Output feedback model predictive control for lpv systems based on quasi-min–max algorithm. **Automatica**, Elsevier, v. 47, n. 9, p. 2052–2058, 2011.

PING, X. Output feedback robust mpc based on off-line observer for lpv systems via quadratic boundedness. **Asian Journal of Control**, Wiley Online Library, v. 19, n. 4, p. 1641–1653, 2017.

PING, X.; LI, Z.; AL-AHMARI, A. Dynamic output feedback robust mpc for lpv systems subject to input saturation and bounded disturbance. **International Journal of Control, Automation and Systems**, Springer, v. 15, n. 3, p. 976–985, 2017.

RAN, M.; WANG, Q.; DONG, C. Anti-windup design for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation and external disturbance. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, Wiley Online Library, v. 26, n. 15, p. 3421–3438, 2016.

REGO, R. C. B. *et al.* Análise e simulação do controlador mpc-aw-lmi aplicado ao conversor ccte operando em condições de saturação no sinal de controle. **Congresso Brasileiro de Automática**, XXII, 2018.

RODRIGUES, M.; ODLOAK, D. Robust mpc for systems with output feedback and input saturation. **Journal of Process Control**, Elsevier, v. 15, n. 7, p. 837–846, 2005.

ROTONDO, D.; NEJJARI, F.; PUIG, V. Robust quasi-lpv model reference ftc of a quadrotor uav subject to actuator faults. **International Journal of Applied Mathematics and Computer Science**, De Gruyter Open, v. 25, n. 1, p. 7–22, 2015.

RUGH, W. J.; SHAMMA, J. S. Research on gain scheduling. **Automatica**, Elsevier, v. 36, n. 10, p. 1401–1425, 2000.

SALA, A. Generalising quasi-lpv and cdi models to quasi-convex difference inclusions. **IFAC-PapersOnLine**, Elsevier, v. 50, n. 1, p. 7560–7565, 2017.

SALA, A.; ARINO, C. Relaxed stability and performance lmi conditions for takagi–sugeno fuzzy systems with polynomial constraints on membership function shapes. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, IEEE, v. 16, n. 5, p. 1328–1336, 2008.

SHAMMA, J. S. An overview of lpv systems. In: **Control of linear parameter varying systems with applications**. [*S.l.*]: Springer, 2012. p. 3–26.

SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. **Multivariable feedback control: analysis and design**. [*S.l.*]: Wiley New York, 2007. v. 2.

SU, Y.; TAN, K. K. Correspondence: Comments on output feedback model predictive control for lpv systems based on quasi-min-max algorithm. **Automatica (Journal of IFAC)**, Pergamon Press, Inc., v. 48, n. 9, p. 2385, 2012.

TANASKOVIC, M.; FAGIANO, L.; GLIGOROVSKI, V. Adaptive model predictive control for linear time varying mimo systems. **Automatica**, Elsevier, v. 105, p. 237–245, 2019.

TESTUD, J. *et al.* Model predictive heuristic control: Applications to industrial processes. **Automatica**, v. 14, n. 5, p. 413–428, 1978.

TÓTH, R. **Modeling and identification of linear parameter-varying systems**. [*S.l.*]: Springer, 2010. v. 403.

TROFINO, A.; COUTINHO, D.; BARBOSA, K. A. Sistemas multivariáveis: Uma abordagem via lmis. **Santa Catarina**, 2003.

TURNER, M. C.; HERRMANN, G.; POSTLETHWAITE, I. Discrete-time anti-windup: Part 1—stability and performance. In: IEEE. **European Control Conference (ECC), 2003**. [*S.l.*], 2003. p. 473–478.

WADA, N.; SAEKI, M. Anti-windup synthesis for a model predictive control system. **IEEE Transactions on Electrical and Electronic Engineering**, Wiley Online Library, v. 11, n. 6, p. 776–785, 2016.

WADA, N.; SAITO, K.; SAEKI, M. Model predictive control for linear parameter varying systems using parameter dependent lyapunov function. **IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 53, n. 12, p. 1446–1450, dec 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/tcsii.2006.883832>>.

WAN, Z.; KOTHARE, M. V. Robust output feedback model predictive control using off-line linear matrix inequalities. **Journal of Process Control**, Elsevier, v. 12, n. 7, p. 763–774, 2002.

WAN, Z.; KOTHARE, M. V. An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities. **Automatica**, Elsevier, v. 39, n. 5, p. 837–846, 2003.

WAN, Z.; KOTHARE, M. V. Efficient robust constrained model predictive control with a time varying terminal constraint set. **Systems & control letters**, Elsevier, v. 48, n. 5, p. 375–383, 2003.

WHITE, A. P.; ZHU, G.; CHOI, J. **Linear parameter-varying control for engineering applications**. [*S.l.*]: Springer, 2013.

WOLLNACK, S. *et al.* Fixed-structure LPV-IO controllers: An implicit representation based approach. **Automatica**, Elsevier BV, v. 83, p. 282–289, sep 2017.

XIA, Y. *et al.* Robust constrained model predictive control based on parameter-dependent lyapunov functions. **Circuits, Systems & Signal Processing**, Springer Nature, v. 27, n. 4, p. 429–446, may 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00034-008-9036-9>>.

YADBANTUNG, R.; BUMROONGSRI, P. Tube-based robust output feedback mpc for constrained ltv systems with applications in chemical processes. **European Journal of Control**, Elsevier, 2018.

YAN, W. *et al.* Identification of systems with slowly sampled outputs using lpv model. **Computers & Chemical Engineering**, Elsevier, v. 112, p. 316–330, 2018.

YANG, W. *et al.* An optimal approach to output-feedback robust model predictive control of LPV systems with disturbances. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, Wiley, v. 26, n. 15, p. 3253–3273, jan 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/rnc.3505>>.

YU, S. *et al.* Model predictive control of constrained lpv systems. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 85, n. 6, p. 671–683, 2012.

YU, S. *et al.* Enlarging the terminal region of nmpc with parameter-dependent terminal control law. In: **Nonlinear Model Predictive Control**. [S.l.]: Springer, 2009. p. 69–78.

ZHANG, T. *et al.* Robust constrained fuzzy affine model predictive control with application to a fluidized bed combustion plant. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, IEEE, v. 16, n. 5, p. 1047–1056, 2008.

ZHANG, T.; FENG, G.; ZENG, X.-J. Output tracking of constrained nonlinear processes with offset-free input-to-state stable fuzzy predictive control. **Automatica**, Elsevier, v. 45, n. 4, p. 900–909, 2009.

ZHAO, M. *et al.* Lpv based robust mpc for a multi-vectorod airship. In: IEEE. **Intelligent Control and Information Processing (ICICIP), 2017 Eighth International Conference on**. [S.l.], 2017. p. 314–318.