



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMIÁRIDO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO E
AUTOMAÇÃO

CLAUDIO MARCIO MEDEIROS DE AZEVEDO

Modelo Matemático para Controle de Um Sistema Ativo de Suspensão Automotiva

Mossoró-RN

2013

CLAUDIO MARCIO MEDEIROS DE AZEVEDO

Modelo Matemático para Controle de Um Sistema Ativo de Suspensão Automotiva

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Sistemas de Comunicação e Automação, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Sistemas de Comunicação e Automação.

Orientador(a): Prof. Dr. Elmer Rolando Llanos Villarreal

Universidade Federal Rural do Semiárido - UFERSA

Mossoró-RN

2013

**Ficha catalográfica preparada pelo setor de classificação e
catalogação da Biblioteca “Orlando Teixeira” da UFERSA**

A994m Azevedo, Cláudio Márcio Medeiros de.

Modelo matemático para controle de um sistema ativo de
suspensão automotiva. / Cláudio Márcio Medeiros de Azevedo.
-- Mossoró, 2013.
80f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Elmer Rolando Llhanos Villarreal

Dissertação (Mestrado em Sistemas de comunicação e
Automação: Área de concentração em Sistemas de comunicação
e Automação) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido.
Pró-Reitoria de Pós-Graduação.

1. Modelagem matemática. 2. Suspensão automotiva.
3. Espaço de estados. 4. Equações de Sylvester. I.
Título.

CDD: 005.101

Bibliotecária: Vanessa Christiane Alves de Souza
CRB-15/452

CLAUDIO MARCIO MEDEIROS DE AZEVEDO

Modelo Matemático para Controle de Um Sistema Ativo de Suspensão Automotiva

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Sistemas de Comunicação e Automação, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Sistemas de Comunicação e Automação.

Aprovado em 16 de Agosto de 2013

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Elmer Rolando Llanos Villarreal
Universidade Federal Rural do Semiárido - UFRSA

Prof. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia
Universidade Federal Rural do Semiárido - UFRSA

Prof. Dr. Alex Sandro de Araújo Silva
Universidade Federal Rural do Semiárido - UFRSA

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, aos meus pais, minha irmã e minha sobrinha pela educação, formação e amor, também pela força que me deram na estruturação deste trabalho. Por se constituírem diferentemente enquanto pessoas, belas e admiráveis em essência, meus agradecimentos por terem aceitado se privar de minha companhia pelos estudos, concedendo a mim a oportunidade de me realizar ainda mais.

Resumo

Com o auxílio da matemática o homem utiliza representações que são capazes de explicar e interpretar fenômenos em estudos, com isso, o uso da matemática como linguagem simbólica conduz a uma representação da situação problema em termos matemáticos, que por sua vez, este modelo pode ser entendido como um conjunto de símbolos e relações que representa uma situação, um fenômeno, ou um objeto real a ser estudado. Diante disso, o presente trabalho apresenta a modelagem matemática de um quarto do sistema de suspensão de um automóvel, a fim de obter uma função de transferência para em seguida colocar o sistema em uma representação no espaço de estados. Serão tratados também os problemas de estabilização em sistemas lineares contínuos no tempo usando realimentação estática de saídas. Os resultados apresentados têm como ponto de partida o conceito de subespaços (C, A, B) -invariantes caracterizados algebricamente através de um par de equações acopladas de Sylvester, cuja solução pode ser obtida, para sistemas que verificam a condição de Kimura, em duas etapas utilizando o algoritmo de Syrmos e Lewis. No caso de sistemas normais como é estudado neste trabalho será usado à técnica de estabilização para dois sistemas satisfazendo a condição de Kimura será feitas simulações deste automóvel passando por duas perturbações externas, e os ganhos dos controladores empregados serão obtidos através dos métodos de alocação de polos e das equações acopladas de Sylvester, e finaliza o trabalho fazendo um elo em relação a respostas das duas matrizes de ganhos de realimentação.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Suspensão Automotiva, Espaço de Estados, Equações de Sylvester.

Abstract

With the aid of the mathematical the man uses representations that are able to explain and interpret phenomena in studies, with this, the use of mathematics with language symbolic leads representation of the problem situation in mathematical terms, which in turn, this model can be understood as a set of symbols and relationships that represent a situation, phenomenon, or a real object to be studied. Therefore, this paper presents a mathematical modeling of quarter suspension system of an automobile in order to obtain a transfer function and then put the system in a state space representation. The second part deals with the problems of stabilization in continuous-time linear systems using static output feedback. The second part deals with the problems of stabilization in continuous-time linear systems using static output feedback. The results presented have as their starting point the concept of subspaces (C, A, B) -invariant algebraically characterized by a pair of coupled Sylvester equations, whose solution can be obtained for systems that verify the condition Kimura, in two stages using the algorithm and Lewis Syrmos. In the case of normal systems as studied in this work will be used the technique of the stabilization for two systems satisfying the condition Kimura, will be simulations of this car passing by two external disturbances, and controller gains employees will be obtained by the methods of allocation poles and coupled Sylvester equations, and finishes the work by making a bond regarding the responses of two arrays of feedback gains.

Keywords: Mathematical Modeling, Automotive Suspension, State Space, Sylvester equations.

Agradecimentos

Detenho este trabalho como resultado de uma longa caminhada, agradecer pode não ser tarefa fácil, nem justa. Com isso, para não correr o risco da injustiça, agradeço de antemão a todos que de alguma forma passaram pela minha vida e contribuíram para a construção de quem sou hoje, desde os companheiros de infância ate os amigos acadêmicos. Gostaria de agradecer primeiramente a Deus, pelo dom da vida, pela fé e perseverança para vencer os obstáculos.

A toda a minha família, e talvez por não encontrar palavras para descrever o que sinto, agradeço em especial aos meus pais, Manoel Braz de Azevedo e Alzira Medeiros de Azevedo, pela orientação, dedicação e incentivo, nessa fase do meu curso de pós graduação e durante toda minha vida, também por me mostrarem o valor de uma conquista, do conhecimento e do amor, sempre me incentivando a crescer, a minha irmã e meu cunhado, que sempre estão dispostos a ajudar no que for necessário, e a minha sobrinha Emilly Karen, que com seu sorriso e suas inocentes palavras faz com que cada instante da minha existência seja abençoado.

Aos meus colegas de mestrado, e em especial a Reuber Régis, Egmídio Caratti, Emmanuel Ramon, Ádller Oliveira, Tarcísio Barreto, Felipe, Jorge, Clayton, Andrade, Adelson, Sameque, enfim a todos que fazem o grupo GEDEA, que sempre colaboraram comigo, não só em discussões sobre a prática docente, mais como também na vida pessoal e a relação com meio social. As meninas que trabalham no CITED, Livia Lessa, Leiliane Karla e Jucileide por sempre estarem se preocupando com o nosso dia-a-dia. Agradeço em especial a meu orientador Elmer Vilarreal e meu co-orientador Ronaldo Garcia, que ambos têm agido de uma forma não só como professor mas também de um mediador de conhecimentos de ética, moral, respeito e em todos os aspectos que abrange a moral de um ser humano, Agradeço também de forma especial ao Professor Alex Araújo pelas horas e dias de orientações a fim de melhorar cada vez mais com o trabalho, e sempre não medindo esforços em suas orientações.

Aos meus grandes amigos Diego Nathan e Aureliano Fagner, como também meus amigos da graduação Marcelo Morais, Mansinho Veríssimo e Cyro Kariello, pelos

anos de convivência, pelos conselhos que me têm dado para crescer profissionalmente, pessoalmente, e pelo exemplo de vida que me passam, me inspirando a chegar ao futuro, pessoas estas na qual eu posso chamar de grandes amigos. Aos professores da banca, pela disposição, pelo estímulo acadêmico, pela valorização cultural que atribuem ao processo pedagógico, e por ter dado total assistência no término deste trabalho, e que sem a ajuda deles, não poderia ter tido êxito, também pela amizade que se construiu para além dos espaços da universidade.

Aos meus colegas de trabalho do NEaD, como também aos meus alunos do curso de matemática da UFERSA, pelo respeito e carinho que têm por mim.

Não poderia deixar de agradecer ao casal Alderi Leocádio e Sueli Costa, que devido a distância da família biológica, agem em forma de pais para mim, pessoas estas que sempre estão na torcida pela minha vitória, sempre buscando o melhor para mim, a seus filhos Alderi e Arthur que sempre estão comigo me dando apoio, e me ajudando no que for possível. A Maria Luziene e minha querida afilhada Victória Letícia por também terem me adotado como filho, e sempre se preocupando comigo. As minhas grandes amigas Valéria Lima e Dayanne por me apoiarem nos objetivos traçados por mim.

A Laíse Medeiros e Léa Medeiros pela paciência, e incentivo que tiveram comigo na reta final deste curso, por sempre estarem me apoiando e me dando força para concluir esta etapa da minha vida.

A CAPES, pela bolsa de fomento durante esses dois anos de mestrado.

Enfim, agradeço a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para a realização deste trabalho. A vocês minha profunda gratidão.

“A menos que modifiquemos a nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo”.

Albert Einstein

Sumário

Lista de Figuras	9
Lista de Símbolos	10
Lista de Abreviaturas e Siglas	12
1 Introdução	13
1.1 Objetivo	15
1.2 Estrutura da Dissertação	16
2 Revisão da Literatura	17
3 Preliminares	21
3.1 Equações Diferenciais Ordinárias	22
3.1.1 Classificação como Linear e Não Linear	23
3.1.2 Operadores Diferenciais Lineares (D)	24
3.1.3 EDO Linear de Ordem n	24
3.2 Transformada de Laplace	25
3.3 Espaço de Estados	28
3.3.1 Alocação de Polos	34
3.4 Controlabilidade e Observabilidade	39
3.4.1 Controlabilidade	39
3.4.2 Observabilidade	41
3.5 Realimentação de saídas, $(\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ - invariância e Equações Acopladas de Sylvester	43

3.5.1	Subespaços Invariantes e Equações Acopladas de Sylvester	44
3.5.2	Aspectos Algoritmicos	46
3.5.3	Algoritmo de Syrmos e Lewis	47
3.6	Sistemas de Suspensão Veicular	49
3.6.1	Sistemas de Controle da Suspensão	50
3.6.2	Sistema de Suspensão passivo	51
3.6.3	Sistema de Suspensão Ativo	51
4	Modelagem Matemática	53
4.1	Modelagem Através da Função de Transferência	53
4.2	Modelagem no Espaço de Estados	59
5	Modelagem, Análises e Resultados	63
5.1	Resposta do Sistema em Malha Aberta	63
5.2	Resposta do Sistema em malha Fechada	65
5.3	Análises e Resultados	67
6	Conclusões e Trabalhos Futuros	69
	Referências Bibliográficas	71
I	Comando MATLAB para Controlabilidade e Observabilidade	74
II	Comando MATLAB - Teste Tachão	75
III	Comando MATLAB - Teste Buraco	76

Lista de Figuras

3.1	Solução de Equação Diferencial com Transformada de Laplace	26
4.1	Modelo do Sistema de Suspensão (1/4) do automóvel	54
4.2	Parte Superior da Planta	55
4.3	Parte Inferior da Planta	56
4.4	Diagrama de Blocos do Sistema Modelado	60
5.1	Resposta em Malha Aberta	64
5.2	Resposta em Malha Aberta com Perturbação	64
5.3	Diagrama do Sistema de Malha Fechada	65
5.4	Diagrama do Sistema de Malha Fechada da Planta	65
5.5	Modelo do Tachão Reflexivo (sinalizador horizontal de vias terrestres) Modelado	66
5.6	Sinais Representativo do Buraco de 60 cm de Comprimento e 10 cm de Profundidade	66
5.7	Tachão Reflexivo Usado na Sinalização da Via	66
5.8	Resposta do sistema com a perturbação buraco	67
5.9	Resposta do sistema com a perturbação tachão reflexivo	67
5.10	Resposta do sistema com a perturbação buraco	68
5.11	Resposta do sistema com a perturbação tachão reflexivo	68

Lista de símbolos

- I_n : Matriz identidade de dimensão n
- A' : Transposta da matriz A
- A^{-1} : Inversa da matriz A
- $V \times V$: Produto vetorial de V por V
- $A > (\geq) 0$: Matriz simétrica, positiva (semi-)definida
- $\det(A)$: Determinante da matriz A
- $A \otimes B$: Produto de Kronecker das matrizes A e B
- $\text{Ker}(A)$: Espaço nulo da matriz A
- $\text{Im}(A)$: Imagem da matriz A
- $\sigma(A)$: Espectro da matriz A
- $\text{Re}(\lambda_i)$: Parte real de λ_i , para $\lambda_i \in \mathbb{C}$
- $\text{Imag}(\lambda_i)$: Parte imaginária de λ_i , para $\lambda_i \in \mathbb{C}$
- $A|_V$: Restrição do mapa A ao subespaço invariante V
- X/V : Espaço quociente de X restrito ao subespaço V
- $\text{Ker}(T)$: Núcleo de uma Transformação Linear
- $\sigma(E, A)$: Espectro (pólos finitos) do par (E, A)
- $\mathcal{V} \oplus \mathcal{T}$: Soma direta dos subespaços \mathcal{V} e \mathcal{T}
- M_1 = Massa referente a (1/4) do automóvel
- M_2 = Massa da Suspensão

- K_1 = Constante de mola do sistema de suspensão
- K_2 = Constante de mola da roda e do pneu
- B_1 = Constante do amortecedor do sistema de suspensão
- B_2 = Constante do amortecedor da roda e do pneu
- U = Força de controle
- X_1 = Deslocamento da massa suspensa (corpo do automóvel) em relação ao solo
- X_2 = Deslocamento da massa não suspensa (eixo) em relação ao solo
- W = Deslocamento do solo

Lista de abreviaturas e siglas

DDC – (Direct Digital Control)

CLP – (Controladores Lógicos Programáveis)

CIM – (Controle Integrado de Manufatura)

LQR – (Regulador Linear Quadrático)

PI – (Proporcional Integral)

LD – (Linearmente Dependente)

LI – (Linearmente Independente)

EDO – (Equação Diferencial Ordinária)

PVI – (Problema de Valor Inicial)

CHR – (Chien, Hrones e Reswick)

1 Introdução

É prudente que a origem das ideias matemáticas é resultado de um processo que procura explicar e entender fatos e fenômenos observados na realidade. O desenvolvimento destas ideias e sua organização intelectual dão-se a partir de elaborações sobre representações da realidade. Estas representações da realidade constituem o que chama-se de “modelos matemáticos”. De um certo modo, A Modelagem Matemática consiste na obtenção, aplicação e avaliação destes modelos. A Modelagem Matemática diz respeito a uma alternativa pedagógica na qual se faz uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação-problema não essencialmente matemática.

Segundo Bassanezi (2006) a modelagem matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la. Várias são as vantagens que o uso da Modelagem Matemática no decorrer das disciplinas de Cálculo nos cursos de engenharia podem proporcionar: potencializa a resolução de problemas da realidade de cada curso; promove a multidisciplinaridade entre as disciplinas de Cálculo e as demais disciplinas dos cursos; aproxima conhecimentos teóricos e práticos; dentre outros.

Além disso, diversos estudos sobre Modelagem Matemática como estratégia para construção de conhecimentos matemáticos indicam uma tendência para o ensino de Matemática, de forma a aproximar a Matemática da realidade, principalmente se aliados ao uso de tecnologias computacionais. Tal aproximação pode possibilitar a formação de indivíduos críticos, o que inclui desenvolvimento de habilidades para operar os diversos tipos de tecnologias demandadas pelos novos conteúdos do trabalho, devido à própria essência da Modelagem Matemática, que pauta na resolução de problemas reais por meio de estratégias matemáticas e computacionais.

Deste modo, a compreensão de Modelagem Matemática é apresentada em termos do processo de construção do modelo matemático, traduzido em esquemas explicativos. Assim, a modelagem matemática, está empregada em diversas áreas, em especial na engenharia de controle, por está centrada no estudo da dinâmica de sistemas físicos,

sendo esta, uma das principais atividades desenvolvidas por esta engenharia, juntamente com a implementação, entre outros.

Em relação aos sistemas de controle, Sampaio (2010) afirma que não é algo novo, sendo eles utilizados desde o século passado com os controles de velocidade de máquinas a vapor de James Watt. No início do século os controles eram totalmente manuais do tipo liga-desliga (on-off) utilizando indicadores locais de temperatura e pressão e atuadores pneumáticos de válvulas. Ainda segundo o próprio autor entre 1915 e 1930, surgiram os primeiros controles proporcionais e registradores gráficos montados em campo. Após 1930, surgiram os controles de ganho ajustáveis mais derivativos e a filosofia de ter uma sala de controle central, com isto a necessidade de transmissão das informações para o centro de controle onde a solução utilizada foi através de transmissores pneumáticos, quando surgiu o primeiro padrão de transmissão de sinais utilizando pressão proporcional aos sinais de entrada [0,21 a 1,05kgf cm^2 3 a 15 PSI (libra por polegada ao quadrado)].

Em consonância do avanço dos sistemas de controle, no início dos anos 60 houve uma grande evolução dos sensores e do chamado controle digital direto (DDC) . No final desta mesma década surgiram nas indústrias automotivas os primeiros controladores programáveis para substituir quadros de comando elétricos.

No início do ano de 1971 houve a introdução dos microprocessadores, assim a utilização dos (CLP) , passou a ser utilizados em diversos tipos de aplicações para automação de processo industrial e não industriais. Em 1976 os CLP's foram utilizados como parte de um (CIM) . Diante dos fatos citados, é prudente que a engenharia de controle, tem desempenhado um papel vital no avanço da engenharia e da ciência, sendo ferramenta importante em aplicações de tecnologia de ponta como: controle de pressão, temperatura, umidade, viscosidade e vazão nas indústrias de processo comando numérico de máquinas-ferramentas das indústrias manufatureiras; projeto de automóveis e caminhões da indústria automobilística.

Segundo Dorf e Bishop (2001), a engenharia de controle está baseada nos fundamentos da teoria de retroação e na análise de sistemas lineares, e integra conceitos da teoria de circuitos e das telecomunicações. Por isso, a engenharia de controle não está limitada a qualquer um dos ramos da engenharia, mais são igualmente aplicáveis as engenharia química, física, mecânica e outras mais.

Ao longo do grande avanço ocorrido na área da indústria automotiva, é impor-

tante destacar que nas primeiras décadas do século XX, a maior atenção dos engenheiros da indústria automotiva estava voltada para o desenvolvimento de veículos mais velozes, seguros e confortáveis. Essa tendência ocasionou serias consequências por parte das próprias comunidades, pois os veículos tornaram-se velozes antes que as rodovias apresentassem condições razoáveis para o tráfego (CASTRO; SOUZA, 2012).

Nas últimas décadas os avanços tecnológicos dos computadores, juntamente com o desenvolvimento de softwares de simulação proporcionaram à indústria automobilística uma maior dinâmica no desenvolvimento de seus novos produtos. Segundo Picado (1998), convencionalmente durante o desenvolvimento de um veículo, vários protótipos eram construídos e testados antes que se chegasse à sua versão final. A construção dos protótipos e a realização de vários ensaios experimentais para a avaliação dos mesmos demandavam elevados recursos financeiros e períodos de tempo. Com o surgimento de ferramentas computacionais, a indústria automobilística conseguiu reduzir consideravelmente o tempo de desenvolvimento de seus produtos.

O comportamento de um veículo em determinadas situações pôde ser simulado e otimizado a fim de evitar situações de perigo ou de desconforto extremos aos ocupantes. Os conceitos conforto e segurança para uma mesma suspensão são conflitantes, uma vez que a otimização de um conceito gera a diminuição do desempenho do outro conceito.

Para projetar uma suspensão automotiva, um estudo de caso deve ser feito “a priori”, com a finalidade de estabelecer uma relação entre os conceitos de conforto e segurança. Geralmente, definido um nível intermediário entre os conceitos, para que o sistema de suspensão atenda aos requisitos do projeto da melhor forma possível. Sistemas de suspensões automotivas tem sido alvo de estudos analíticos e experimentais, sempre no sentido de melhorar a segurança e o conforto dos passageiros do automóvel (PICADO, 1998).

1.1 Objetivo

O presente trabalho tem como objetivo principal fazer a modelagem de um sistema de suspensão ativo baseado em um quarto da suspensão de um automóvel, a partir da modelagem do sistema, pretende-se desenvolver um controle que possa minimizar a perda de tração provocada pela perturbação que ocorre na suspensão em movimento

em terrenos irregulares e que não é corrigido por se tratar de um sistema passivo. Serão simuladas dois tipos de perturbações externas a fim de analisar suas respostas. Deste modo se faz aplicação do algoritmo para obtenção da matriz de realimentação de saídas, usando o teorema que estabelece a condição necessária e suficiente para a existência de solução do problema de estabilização por realimentação estática de saídas Castelan et al. (2003) e Villarreal et al. (2009), como também será empregado o método de alocação de polos (OGATA, 2010), onde esses serão os dois métodos empregados na obtenção da matriz K de realimentação.

1.2 Estrutura da Dissertação

Este trabalho é composto por uma parte introdutória, onde será apresentado no Capítulo 2 a revisão feita acerca de trabalhos que já vem sendo debatidos a respeito do tema proposto pelo trabalho, na sequência o capítulo 3 tem como finalidade apresentar sistematicamente conceitos e definições matemáticas que servirão de fomento para discussões futuras relacionada com a modelagem do problema como também para conhecimentos relacionados a controle, ou seja, irá apresentar conceitos que serão utilizados na aprendizagem das técnicas de controle a serem empregadas, como também serão apresentados exemplos numéricos, onde são fornecidos para ilustrar a aplicação dos algoritmos propostos. Ainda neste capítulo será apresentado a fundamentação dos sistemas de suspensão, sendo eles o sistema passivo e o sistema ativo, mostrando as principais características de cada um e suas respectivas diferenças existentes entre eles, sendo o último o principal alvo da pesquisa em questão.

O Capítulo 4 ficará responsável pela apresentação da modelagem do problema, fazendo uso da modelagem matemática, como também as transformadas de laplace, a fim de obter a função de transferência do problema proposto (com e sem perturbação), como também a modelagem no espaço de estados. O Capítulo 5, mostra as análises e resultados que foram obtidos através das técnicas empregadas neste trabalho, onde serão ilustrados através de gráficos os principais resultados obtidos durante a pesquisa, é importante destacar, que a modelagem será feita baseado no software MATLAB®, e utilizando o toolbox SIMULINK® para apresentar os gráficos de respostas. E por fim o Capítulo 6 vem mostrar as conclusões finais, como também os trabalhos futuros que pretende desenvolver.

2 Revisão da Literatura

Para que os automóveis apresentem melhores características de dirigibilidade, desempenho e conforto empregam-se as suspensões ativas, as quais consistem em elementos ativos e sistemas de controle que gerenciam a dinâmica veicular através de uma estratégia de controle. Geralmente, é definido um nível intermediário entre os conceitos, para que o sistema de suspensão atenda aos requisitos de projeto da melhor forma possível.

Deste modo, é observável na literatura três tipos de suspensões automotivas, suspensões passivas, semi-ativas e as ativas. Estas admitem variações em suas configurações. Pode-se citar as suspensões ativas e semiativas com predição de distúrbios; suspensões semi-ativas auto-niveladoras, eletro-hidráulicas e hidro-pneumáticas; e ainda suspensões passivas hidro-pneumáticas, são vários os trabalhos encontrados na literatura que tem suas pesquisas voltada para esses tipos de suspensões.

É observável no trabalho de Picado (1998), um estudo dos principais tipos de suspensões semi-ativas, caracterizando-as como suspensões dependentes e suspensões independentes aplicadas a modelos de 2 graus de liberdade. Apresenta também a viabilidade (econômica) de um sistema de suspensão semi-ativa mostrando que depende da rapidez do algoritmo de controle, da capacidade de processamento do hardware disponível e dos custos para instalação e manutenção da suspensão. Para mostrar como estes fatores influenciam na concepção de um sistema de suspensão automotiva, foram reunidos vários algoritmos de controle.

Ainda em Picado (1998), é importante ressaltar que apesar de ter feito o controle do sistema semi-ativo, ele ainda apresentou um estudo comparativo entre os três tipos de suspensões: Passiva, Semi-Ativa e Ativa. Com o objetivo de determinar os fatores limitantes para o projeto e para a fabricação de um sistema semi-ativo de suspensão automotiva. A aplicação de redes neurais artificiais, para controle semi-ativo, também foi usada, visando diminuir a quantidade de sensores necessários ao controle, porém com elevado custo de processamento. Para cada tipo de controle, após o equacionamento, a avaliação do índice de desempenho e de treinamento das redes, simulou-se os modelos e

comparou-se os resultados obtidos, no domínio de tempo e da frequência. Observou-se que o desempenho da suspensão ativa é superior no controle das vibrações e constatou, ainda, que o emprego de controle semi-ativo não enfrentou nenhum problema com relação ao tempo de processamento e das informações pertinentes do algoritmo, pois se obteve um tempo menor do que 10^{-4} segundos, que é tempo suficiente para se efetuar o controle.

Já em Almeida (2002) desenvolve a simulação e o controle de um sistema de suspensão. Onde analisa, primeiramente, um sistema de dois graus de liberdade, que leva a uma introdução simples do comportamento de sistemas de três graus de liberdade; que requer três coordenadas para descrever o seu movimento. Assim, para realizar a modelagem do problema e o equacionamento das equações de movimento utilizou-se como base a segunda lei de Newton e a equação de Lagrange. É importante também frisar que para obtenção dos resultados das equações foi utilizado o método de Range-Kutta de 4ª ordem, utilizando o software MATLAB®, para o caso de um sistema de dois graus de liberdade, que é comparado com a solução analítica obtida para validade do método numérico utilizado. Assim, para controlar a estabilidade e o desempenho do sistema, quando atribuído vibrações externas, utilizaram-se os métodos de controle clássico, (LQR) e alocação de polos, mostrando que os sistemas de controle testados realmente tiveram resultados positivos, uma vez que as oscilações provocadas pelas perturbações externas em malha fechada tiveram um amortecimento em intervalos muito pequenos quanto ao projeto de controlador.

No trabalho de Zago et al. (2010) trabalha com controle ótimo em um quarto do sistema de suspensão automotiva no intuito de ajustar o modo de controle de forma a privilegiar o conforto dos ocupantes ou uma condição mais esportiva. Para isso é projetado uma bancada para validação experimental dos testes com o controlador; assim é feita a modelagem matemática de um quarto de suspensão automotiva, à qual será aplicado o controlador ótimo. Assim, o trabalho apresenta a modelagem matemática para o sistema de um quarto de suspensão automotiva e a aplicação do controle ótimo para fins de estabilização das vibrações, bem como a proposta de uma bancada de simulação para a validação experimental do modelo. Para realizar as simulações, foram utilizadas perturbações externas como forma de obstáculo representando a oscilação do relevo da estrada.

O trabalho de Ando Y e Suzuki (1996) apresenta um sistema de suspensão do carro, com preocupação na qualidade do passeio e a aderência à estrada, são relevantes

para os movimentos lenta e rápida, o trabalho relata a diferença entre as velocidades destas dinâmicas, e obtém um modelo de suspensão que tem dois subsistemas. Para tal modelo o método da perturbação singular é aplicada para concepção do sistema de controle da suspensão. Devido ao sistema usado ser não linear, precisa-se primeiramente utilizar o método da linearização, para que se tenha um novo sistema, a partir desse novo sistema, utiliza o método LQ, para que se possam melhorar as propriedades. É feita as simulações utilizando os dois tipos diferentes sendo elas de um sistema não linear e de um sistema linear, mostrando a viabilidade dos sistemas, como também as características de estabilização.

Em Sam et al. (2004) apresenta uma estratégia robusta na concepção de um controlador para um sistema de suspensão ativa, que é baseado na teoria variável da estrutura de controle. O modelo matemático de um carro *quarter* é apresentado em forma de espaço de estado. Utiliza o controlador (PI) e faz um estudo detalhado do algoritmo de controle proporcional-integral, é apresentado e resolvido o problema de condição incompatível no modelo matemático. As características de desempenho e a robustez do sistema de suspensão ativa são avaliados por dois tipos de controladores, e em seguida, em comparação com o sistema de suspensão passiva. Mostra também que a utilização da técnica de controle proporcional-integral provou ser eficaz no controle do veículo e, mais robusta comparada com o método do LQR e o sistema de suspensão passiva.

Em Silva e Grandinetti (2005) é feita a modelagem de 1/4 de uma suspensão automotiva utilizando um elemento atuador ativo composto por uma servoválvula e por um cilindro hidráulico de dupla ação. Simulou-se o comportamento do sistema de suspensão e comportamento do sistema formado pela servoválvula e pelo cilindro hidráulico. É importante ressaltar que não foi efetuada simulação de realimentação em malha fechada, em seguida, é feita a apresentação dos resultados e a análise dos mesmos Considera-se que a válvula é de centro crítico (isto é, com sobreposição nula, que apresenta relação linear em toda faixa da curva vazão versus tensão de controle) e simétrico (apresenta a mesma abertura para ambos os lados; o que acarreta a mesma vazão ao ser acionada por um sinal positivo e negativo de mesma magnitude). Um atuador ativo compensará as variações de deslocamento oriundas da estrutura do automóvel e da ondulação do solo. O sistema ativo determina a força desejada a ser empregada pelo atuador e comanda a servoválvula para sua ação. Apresenta-se inicialmente o comportamento das massas da carroceria e da roda do sistema de suspensão veicular passivo quando esse sistema é perturbado por

um obstáculo de 15cm de altura que atua por 1 segundo. Em seguida, promove-se a simulação do sistema considerando um pavimento sem obstáculos, sendo neste caso regular e uniforme, e tendo as forças como entrada em duas condições: inicialmente como um degrau unitário e em seguida como uma força que atua por 1 segundo, permitindo que massas da carroceria e da roda retornem às suas posições iniciais.

Outros tipos de implementações das suspensões ativas é o controle preditivo, que pode ser visto em Langlois e Anderson (1995). O aumento de desempenho proporcionado por esta configuração, muitas vezes não justifica o elevado custo de produção. Somente em casos especiais onde o veículo necessite de altos níveis de desempenho como pode ser vistos em carros de fórmula 1, em veículos “off-road” por controles adaptativos. Pode ser tomado como exemplo o trabalho de Esmailzadeh e Fahimi (1997), onde o modelo de suspensão ativa com controle ótimo linear quadrático foi adotado como referência para o controle adaptativo. E apresentou com resultado que após 4 segundos as variações de estado convergiam para o modelo de referência para o controle adaptativo e que após 4 segundos as variações de estado convergiam para o modelo referência e daí em diante, o sistema comportou-se exatamente como o modelo ótimo de referência.

3 Preliminares

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos, definições, e exemplos, de conteúdos matemáticos utilizados no decorrer do trabalho, a fim de tornar-se mais objetivo os procedimentos que serão tomados em capítulos posteriores. Deste modo, os assuntos abordados neste capítulo terão como base os trabalhos de (BOLDRINI et al., 1980), (CALLIOLI et al., 2007), (STEINBRUCH; PAULO, 1987), (OGATA, 2010), (ZILL; CULLEN, 2001) e (SODRE, 2002).

Dentre vários conteúdos que serão abordados, é importante que o leitor tenha um conhecimento prévio sobre conceitos e definições relacionados com álgebra linear. Deste modo, é conveniente que saiba definir um espaço e um subespaço vetorial dentro de um Conjunto V , pois, às vezes é observável que dentro de um conjunto V existem subconjuntos W menores, que também são caracterizados espaços vetoriais, e assim sendo esse conjunto menor W passará a ser chamado de subespaço vetorial de V .

Outra questão bastante importante no estudo de espaços vetoriais é a obtenção de novos vetores a partir de vetores dados, sendo neste caso caracterizado como uma combinação linear entre os vetores, deste modo, é fundamental saber se um vetor gerado é ou não, uma combinação linear de outros. Baseado nesta concepção é importante ter noção de dependência e independência linear, uma vez que o vetor sendo (LD) mostra-se que tem um vetor dentro do conjunto V que depende de outros vetores de V , para sua existência, de modo análogo, se nenhum desses vetores do conjunto V depender de vetores de V , este é caracterizado como (LI) .

Ainda referente aos conhecimentos de álgebra linear, é importante que tenha domínio sobre as Transformações Lineares, pois, também tem uma grande particularidade no estudo de álgebra linear, por serem aplicações nas quais o domínio e o contra domínio são espaços vetoriais, sendo este o objeto primordial no estudo da álgebra linear. Uma aplicação bastante importante no estudo da transformação linear é o estudo do posto de uma matriz, pois em uma matriz, pode-se considerar que as linhas ou as colunas são vetores. Posto de uma matriz é uma característica matricial, com várias implicações em relação à dependência e independência linear e a dimensão de um espaço vetorial. O

posto de uma matriz A é o número de linhas não nulas quando a mesma está escrita na forma reduzida escalonada por linhas ou, equivalentemente, o número de linhas ou colunas linearmente independentes de A , visto que este número é o mesmo, seja para colunas, seja para linhas. O valor máximo do posto de uma matriz é menor que os números correspondentes ao número de linhas e colunas, ou seja, se a matriz tem dimensão 3×5 , o valor máximo que pode alcançar o posto desta matriz é 3 (pois $3 = \text{mínimo}(3, 5)$). Quando se tem uma matriz cujo $\text{posto}(A) = \text{mínimo } "m, n"$ ou seja, se o posto é o maior valor possível diz-se que esta matriz é de posto completo.

Dentro das transformações lineares, ainda pode-se destacar duas aplicações importantes que são elas, o núcleo e a imagem de uma transformação linear, que são dois subconjuntos especiais dos espaços vetoriais envolvidos na definição da transformação linear. Onde o núcleo é o conjunto de todos os vetores do domínio de V que têm como imagem o elemento neutro $0 \in W$, deste modo, é notório que o núcleo de uma transformação linear não pode ser vazio, já a imagem é o conjunto de todos os vetores do contradomínio W que são imagens de pelo menos um vetor $v \in V$, onde v é um elemento do conjunto V . Assim, os conteúdos abordados referentes a conceitos de álgebra linear, podem ser encontrados facilmente em livros didáticos de álgebra linear como Boldrini et al. (1980), Callioli et al. (2007), Steinbruch e Paulo (1987), entre outros autores que abordam os temas supracitados.

A partir de agora, na seção 3.1, nossos trabalhos serão baseados nos estudos de Zill e Cullen (2001), onde ele faz toda uma explanação dos conteúdos referentes a (EDO)

3.1 Equações Diferenciais Ordinárias

As equações diferenciais desempenham um papel muito importante na engenharia e nas ciências exatas. Muitos problemas conduzem a uma ou várias equações diferenciais que deverão ser resolvidas. O tipo de equações que têm recebido maior atenção são as equações diferenciais lineares. Desta forma, as equações diferenciais surgem a partir da tentativa de formular, ou descrever, certos sistemas físicos em termos matemáticos. Assim,

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^n(x)) = f(x) \quad (3.1)$$

neste caso, y', y'', y^n representa a quantidade de vezes que a função y é derivável, envolvendo uma função incógnita $y = y(x)$ e suas derivadas ou suas diferenciais. x e y representam variável independente e variável dependente, respectivamente e o símbolo y^k denota a derivada de ordem k da função $y = y(x)$. No caso da Equação 3.1, quando se iguala a 0, diz-se que a equação é homogênia. Outro critério importante no estudo das equações diferenciais ordinárias é a questão quando a sua linearidade, o que será tratado na seção 3.1.1.

3.1.1 Classificação como Linear e Não Linear

Uma equação diferencial é chamada de linear quando ela pode ser escrita na forma:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \quad (3.2)$$

onde $y^n, y^{n-1}y'$ identifica quantas vezes a função y está sendo derivável, observe que as equações diferenciais ordinárias são caracterizadas por duas propriedades:

1. A variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau, isto é, a potência de cada termo envolvendo y é 1.
2. Cada coeficiente depende apenas da variável independente x .

Deste modo, uma equação quando é dita não linear tem as seguintes características:

1. $x dy + y dx = 0$
2. $\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 0$
3. $x^3 \ddot{\ddot{y}} - x^2 \ddot{y} + 3x \dot{y} + y^2 = 0$

São equações diferenciais ordinárias não lineares de primeira e segunda ordem. Outro detalhe importante no estudo das EDO, é a inserção do operador diferencial D , que tem a característica de transformar uma função diferenciável em outra função, o que poderá ser visto com mais detalhe na Seção 3.1.2.

3.1.2 Operadores Diferenciais Lineares (D)

Demonstra-se que o conjunto $\mathcal{F} = C^n(\mathbb{R})$ de todas as funções reais n vezes continuamente diferenciáveis, é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Para cada $f \in \mathcal{F}$, define-se o operador diferencial $D : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ por:

$$D(f) = f'$$

sendo $D^0(f) = f$. Para cada $k = 1, 2, \dots, n$, assim define-se o operador diferencial recursivo $D^k : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ por:

$$D^k(f) = D[D^{k-1}(f)] = f^{(k)}$$

ou seja, que representa a derivada de ordem k da função $f \in \mathcal{F}$.

Demonstra-se que são lineares estes operadores diferenciais $D^k : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, isto é, para quaisquer $f, g \in \mathcal{F}$ e para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$:

$$D^k(af + bg) = aD^k(f) + bD^k(g)$$

Para EDO de ordem n , será tratado na seção 3.1.3

3.1.3 EDO Linear de Ordem n

Uma Equação Diferencial de Ordem n é escrita da seguinte forma:

$$a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + a_2(x)y^{n-2} + \dots + a_n(x)y = b(x) \quad (3.3)$$

onde as funções $b = b(x)$ e $a_k = a_k(x)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$), são funções conhecidas, sendo $a_0 = a_0(x)$ não identicamente nula e todas estas funções devem depender somente da variável x . A função (incógnita) desconhecida é $y = y(x)$. Assim é possível definir o operador diferencial linear:

$$L = (a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + a_2(x)D^{n-2} + \dots + a_n(x))(f) \quad (3.4)$$

e assim a equação diferencial terá a forma simplificada:

$$(a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + a_2(x)D^{n-2} + \dots + a_n(x))(y) \\ L(y) = b(x) \quad (3.5)$$

Ao se fazer uma breve leitura sobre EDO, é importante tomar conhecimento sobre as Transformadas de Laplace, que será apresentada na seção 3.2.

3.2 Transformada de Laplace

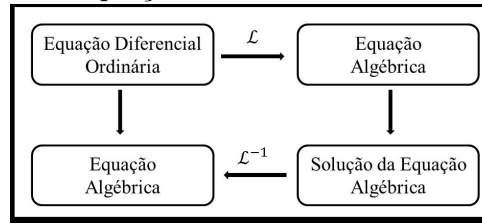
Segundo Sodre (2002) Oliver Heaviside, quando estudava processos simples para obter soluções de Equações Diferenciais, vislumbrou um método de Cálculo Operacional que leva ao conceito matemático da Transformada de Laplace, que é um método simples para transformar um (PVI), (onde este PVI é formado por uma equação diferencial e condições iniciais), em uma equação algébrica, de modo a obter uma solução deste PVI de uma forma indireta, sem o cálculo de integrais e derivadas para obter a solução geral da Equação Diferencial. Pela utilidade deste método em Matemática, em Computação, em Engenharias, em Física e em outras ciências aplicadas, o método representa algo importante neste contexto.

As transformadas de Laplace são muito usadas em diversas situações, porém, o foco do trabalho irá tratar de suas aplicações na resolução de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares.

definição 1. *Se $f = f(t)$ é uma função real ou complexa, definida para todo $t \geq 0$, e o parâmetro z é um número complexo da forma $z = s + iv$ de modo que para cada $s > 0$, ocorre a convergência da integral imprópria:*

$$F(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt \quad (3.6)$$

Figura 3.1: Solução de Equação Diferencial com Transformada de Laplace



Fonte: Adaptado de (SODRE, 2002).

$$F(z) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M f(t) e^{-zt} dt \quad (3.7)$$

então a função $F = F(z)$ definida pela Equação (3.6), recebe o nome de transformada de Laplace da função $f = f(t)$. Tomando o parâmetro z como um número real, a parte imaginária $v = 0$, usa-se $z = s > 0$ e a Equação (3.7) ficará na forma:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (3.8)$$

A Transformada de Laplace depende de s , é representada por uma letra maiúscula $F = F(s)$, enquanto que a função original que sofreu a transformação depende de t é representada por uma letra minúscula $f = f(t)$. Para representar a transformada de Laplace da função f , é comum usar a notação:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (3.9)$$

a seguir será apresentado um exemplo numérico a fim de exemplificar as definições apresentadas em 3.6, 3.7, 3.8 e 3.10.

Exemplo 3.2.1. *A função degrau unitário é muito importante neste contexto e é definida por:*

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Assim, para a função de degrau unitário e considerando $s > 0$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[u(t)] &= \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt \\
&= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M e^{-st} dt \\
&= \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^M \\
&= \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-sM}}{-s} - \frac{1}{-s} \right] \\
&= \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

Outra questão importante que deve ser relatada é a aplicação da Transformada de Laplace de Derivadas de Funções, pois é propriedade muito útil na resolução de um problema com valor inicial, ou seja,

$$\mathcal{L}[\dot{y}] = s\mathcal{L}[y] - y(0)$$

entenda \dot{y} como sendo a primeira derivada de y . De fato, Tomando como base a Equação (3.8), tem-se:

$$\mathcal{L}[\dot{y}] = \int_0^{\infty} \dot{y}(t)e^{-st} dt = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M \dot{y}(t)e^{-st} dt$$

Utilizando o método de integração por partes, e fazendo $u = e^{-st}$ e $dv = \dot{y}(t)$, terá

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\dot{y}] &= \lim_{M \rightarrow \infty} [y(t)e^{-st}]_0^M - \int_0^M y(t)(-s)e^{-st} dt \\
&= \lim_{M \rightarrow \infty} [y(M)e^{-sM} - y(0)] + s \int_0^M y(t)e^{-st} dt \\
&= \lim_{M \rightarrow \infty} [y(M)e^{-sM}] - y(0) + s \int_0^M y(t)e^{-st} dt \\
&= 0 - y(0) + s \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt
\end{aligned}$$

como $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ então $y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$, assim sendo, $\mathcal{L}[y(t)] = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt$, portanto,

$$\mathcal{L}[\dot{y}] = 0 - y(0) + s \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt = sY(s) - y(0)$$

Sendo que $\lim_{M \rightarrow \infty} [y(M) e^{-sM}] = 0$, pois a função $y = y(t)$ é de ordem exponencial quando $t \rightarrow \infty$, assim:

$$\mathcal{L} [\dot{y}] = sY(s) - y(0)$$

Assim sendo, pode-se obter uma regra geral para as derivadas de Transformada de Laplace, utilizando a própria Equação (3.8), que trata da Transformada de Laplace, derivando ambos os membros da igualdade em relação a variável s , obtém-se:

$$\frac{dF}{ds} = \int_0^{\infty} (-t) f(t) e^{-st} dt$$

Que também pode ser escrita como,

$$\frac{dF}{ds} = \mathcal{L}[(-t)f(t)] = -\mathcal{L}[(t)f(t)] = \mathcal{L}[(t)f(t)] = -\frac{dF}{ds}$$

que após tomar as derivadas sucessivas de $F = F(s)$, chega a regra geral:

$$\mathcal{L} [t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \quad (3.10)$$

Após uma explanação sobre os conteúdos abordados referentes as Transformadas de Laplace, será discutido agora na seção 3.3 a análise de equações no espaço de estados, nesta seção, os conteúdos a serem abordados terão como base os conceitos de (OGATA, 2010), como também (ZILL; CULLEN, 2001).

3.3 Espaço de Estados

A análise no espaço de estados envolve três tipos de variáveis que estão presentes na modelagem de sistemas dinâmicos, que são as variáveis de entrada, variáveis de saída e variáveis de estado, como será visto adiante, a representação de um dado sistema no espaço de estados não é única, mas o número de variáveis de estado é o mesmo para qualquer uma das diferentes representações do mesmo sistema no espaço de estado. Deste modo, os sistemas dinâmicos devem conter elementos que memorizem os valores de entrada para $t \geq t_1$. Uma vez que os integradores, em um sistema de controle de tempo

contínuo, servem como dispositivos de memória, as saídas desses integradores podem ser consideradas variáveis que definem o estado interno do sistema dinâmico, assim, as saídas dos integradores podem ser escolhidas como variáveis de estado.

Suponha que um sistema com múltiplas entradas e múltiplas saídas envolva n integradores. Considere também que existam r entradas $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$ e m saídas $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$. Defina as n saídas dos integradores como variáveis de estado: $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Deste modo o sistema pode ser descrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_1(t) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ x_2(t) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ \vdots \\ x_n(t) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \end{cases} \quad (3.11)$$

As saídas $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ do sistema podem ser dadas por:

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ y_2(t) = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ \vdots \\ y_m(t) = g_m(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \end{cases} \quad (3.12)$$

Definindo $x(t)$ e $y(t)$ como:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \end{bmatrix}$$

e

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad g(x, u, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \end{bmatrix}$$

das Equações (3.11) e (3.12), tem-se:

$$x(t) = f(x, u, t) \quad (3.13)$$

$$y(t) = g(x, u, t) \quad (3.14)$$

onde a Equação (3.13) representa a equação de estado e a Equação (3.14) representa a equação de saída. Caso o as funções vetoriais f e/ou g envolvam explicitamente o tempo t , então o sistema será chamado de variante no tempo.

Assumindo que as Equações (3.13) e (3.14) sejam linearizadas em torno de um ponto, então as equações de estados linearizadas podem ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \quad (3.15)$$

onde $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ e $D(t)$ são respectivamente matriz de estado, matriz de entrada, matriz de saída, e, matriz de transmissão direta. Caso as funções vetoriais f e g não envolvão o tempo explicitamente, então o sistema será denominado de sistema não derivável no tempo. Trabalhando com as equações (3.15) invariante no tempo, podem ser simplificadas para:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ \dot{y}(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (3.16)$$

As equações apresentadas em (3.16) é a equação de estado linearizada de um sistema linear invariante no tempo e equação de saída linearizada para o mesmo sistema. Uma questão

importante no estudo das Equações no Espaço de Estados é a representação de sistemas de equações diferenciais escalares, uma vez que um sistema dinâmico que consiste em um número finito de elementos concentrados pode ser descrito por uma EDO de ordem n , onde o tempo é a variável independente. Deste modo, seja o seguinte sistema de ordem n :

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = u \quad (3.17)$$

onde, a potência do termo y nesta equação, indicará a quantidade de vezes que o termo é derivável, o conhecimento $y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{n-1}(0)$ com entrada $u(t)$ para $t \geq 0$, determina completamente o comportamento futuro do sistema, pode-se considerar $y(t)', y(t), \dots, y^{n-1}(t)$, como um conjunto de n variáveis de estado fazendo:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ \vdots \\ x_n = y^{n-1} \end{cases}$$

Desse modo a Equação (3.17) pode ser escrita do seguinte modo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_n x_1 - \dots - a_1 x_n + u \end{cases} \quad (3.18)$$

reorganizando a Equação (3.18), tem;

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.19)$$

onde,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

deste modo a saída pode ser dada por:

$$y = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ou simplesmente,

$$y = CX \tag{3.20}$$

Onde

$$C = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

Assim, percebe-se que a equação diferencial de primeira ordem, Equação (3.19), é a equação de estados e a equação algébrica, a Equação (3.20), é a equação de saída. Observe que a representação no espaço de estados de um sistema de função de transferência,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n}$$

Também é dada pelas Equações (3.19) e (3.20). Assim sendo, será apresentado agora, quando a equação diferencial linear é de ordem n , ou seja, será explicado como ficará sua representação na forma de espaço de estados.

Dado o sistema de equações diferenciais que possui derivadas na função de entrada, como:

$$y^n + a_1y^{n-1} + \dots + a_{n-1}\dot{y} + a_ny = b_0u^n + b_1u^{n-1} + \dots + b_{n-1}\dot{u} + b_nu \tag{3.21}$$

O principal problema na definição das variáveis de estado para esse caso ocorre nos termos com derivadas da entrada u . As variáveis de estado devem ser tais que eliminem as derivadas de u na equação de estado.

Uma maneira de obter uma equação de estado e a equação de saída, para esse caso, é definir as seguintes n variáveis como um conjunto de n variáveis de estado:

$$\begin{cases} x_1 = y - \beta_0 \\ x_2 = (\dot{y} - \beta_0 \dot{u}) - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\ x_3 = (\ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u}) - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u \\ \vdots \\ x_n = y^n - \beta_0 u^{n-1} - \beta_1 u^{n-2} - \dots - \beta_{n-2} \dot{u} - \beta_{n-1} u = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u \end{cases}$$

onde $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ são determinadas a partir de

$$\begin{cases} \beta_0 = b_0 u \\ \beta_1 = b_1 - a_1 \beta_0 \\ \beta_2 = b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 \\ \beta_3 = b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} = b_{n-1} - a_1 \beta_{n-2} - \dots - a_{n-2} \beta_1 - a_{n-1} \beta_0 \end{cases}$$

Com essa escolha de variáveis de estado, a existência e a exclusividade da solução da equação de estado estão garantidas. (É importante frisar que esta não é a única escolha de um conjunto de variáveis de estado). Com essa escolha. Tem-se:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u \\ \dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + \beta_{n-1} u \\ \dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + \beta_n u \end{cases}$$

onde β_n é dado por:

$$\beta_n = b_n - a_1 \beta_{n-1} - \dots - a_{n-1} \beta_1 - a_{n-1} \beta_0$$

escrevendo na forma matricial, tem-se:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u \\ Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u \end{cases}$$

ou simplesmente,

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (3.22)$$

onde,

$$x = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ \dots \ 0], \quad D = \beta_0 = b_0$$

Com essa representação no espaço de estados, as matrizes A e C são exatamente as mesmas do sistema da Equação (3.17). As derivadas do termo à direita da Equação (3.21) afetam somente os elementos da matriz B . Observe que a representação no espaço de estados para a função de transferência,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

é dada pelas Equações (3.22). Baseado nos conhecimentos já vistos, desde a parte introdutória sobre álgebra linear até a parte de representação no espaço de estados, Na seção 3.3.1, será apresentado um método de projeto de alocação de polos, mostrando que, se o sistema considerado for de estado completamente controlável, então os polos de malha fechada do sistema poderão ser alocados em qualquer posição desejada por meio de uma realimentação de estado, empregando um matriz de ganho apropriada. Vale ressaltar que os conteúdos abordados a seguir serão baseados em (OGATA, 2010).

3.3.1 Alocação de Polos

Será admitido que os polos desejados de malha fechado devam estar em $s = \mu_1, s = \mu_2, \dots, s = \mu_n$. Neste ítem será limitada a discursão apenas aos sistemas de

uma entrada e uma saída. Ou seja, supõe-se que o sinal de controle $u(t)$ e o sinal de saída $y(t)$ sejam escalares e o sinal de referência $r(t)$ seja nulo. Assim há uma condição necessária e suficiente para que os polos de malha fechada possam ser alocados em posições arbitrárias no plano s : o estado do sistema precisa ser completamente controlável. Então será discutido métodos para a determinação da matriz de ganho de realimentação de estado requerida, vale ressaltar que existem diversos métodos para encontrar a matriz \mathbf{K} , como pode ser visto em (OGATA, 2010).

Determinação da matriz K com a utilização do método de substituição direta. Se o sistema for de ordem baixa ($n \leq 3$), a substituição direta da matriz \mathbf{K} no polinômio característico desejado poderá ser mais simples. por exemplo, se $n = 3$, então escreva a matriz de ganho \mathbf{K} de realimentação de estado como:

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix}$$

Substitua essa matriz \mathbf{K} no polinômio característico desejado $|sI - A + BK|$ e igual a $(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)$, ou

$$|sI - A + BK| = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)$$

Como ambos os lados da equação característica são polinômios em s , igualando os coeficientes de mesma potência em s em ambos os lados, é possível determinar os valores de K_1, K_2, K_3 . Essa abordagem serve para $n = 2$ ou 3 . Caso o sistema não for de estado completamente controlável, a matriz \mathbf{K} não poderá ser determinada.

Determinação da matriz K com a utilização da fórmula de Ackermann. Existe uma fórmula bem conhecida, denominada fórmula de Ackermann, para determinação da matriz de ganho K de realimentação de estado. Que será apresentada a seguir:

Considere o sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3.23}$$

onde será utilizado o controle por realimentação de estado $u = -Kx$, supondo que o sistema seja de estado completamente controlável. Desse modo, deseja-se que os polos

desejados de malha fechada estejam em $s = \mu_1, s = \mu_2, \dots, s = \mu_n$. O uso de controle por realimentação de estado

$$u = -Kx$$

modifica a equação do sistema Equação (3.23) para

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (3.24)$$

definindo \tilde{A} , como sendo:

$$\tilde{A} = A - BK$$

A Equação característica desejada é:

$$\begin{aligned} |sI - A + BK| &= |sI - \tilde{A}| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) \\ |sI - A + BK| &= s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Como o Teorema de Cayley-Hamilton estabelece que \tilde{A} satisfaz sua própria equação, este Teorema de Cayley-Hamilton pode ser visto em (BOLDRINI et al., 1980).

$$\phi(\tilde{A}) = \tilde{A}^n + \alpha_1 \tilde{A}^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} \tilde{A} + \alpha_n I = 0 \quad (3.26)$$

Utilizando a Equação (3.26) na obtenção da fórmula de Ackerman. Para simplificar o procedimento, será considerado o caso em que $n = 3$, mas vale ressaltar que o procedimento pode ser estendido para qualquer outro n , positivo inteiro. Considere as seguintes identidades

$$\begin{aligned} I &= I \\ \tilde{A} &= A - BK \\ \tilde{A}^2 &= (A - BK)^2 = A^2 - ABK - BK\tilde{A} \\ \tilde{A}^3 &= (A - BK)^3 = A^3 - A^2BK - ABK\tilde{A} - BK\tilde{A}^2 \end{aligned}$$

Multiplicando as equações precedentes, na mesma ordem, respectivamente por $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$ e α_0 (onde $\alpha_0 = 1$) e somando os resultados, será obtido:

$$\begin{aligned}
\phi(\tilde{A}) &= \alpha_3 I + \alpha_2 \tilde{A} + \alpha_1 \tilde{A}^2 + \tilde{A}^3 \\
&= \alpha_3 I + \alpha_2 (A - BK) + \alpha_1 (A^2 - ABK - BK\tilde{A}) + \tilde{A}^3 - \\
&\quad - A^2 BK - ABK\tilde{A} - BK\tilde{A}^2 \\
&= \alpha_3 I + \alpha_2 A + \alpha_1 A^2 + A^3 - \alpha_2 BK - \alpha_1 ABK - \alpha_1 BK\tilde{A} - \\
&\quad - A^2 BK - ABK\tilde{A} - A^2 BK - ABK - BK\tilde{A}^2
\end{aligned} \tag{3.27}$$

com relação a Equação (3.26), será obtido:

$$\alpha_3 I + \alpha_2 \tilde{A} + \alpha_1 \tilde{A}^2 + \tilde{A}^3 = \phi(\tilde{A}) = 0 \tag{3.28}$$

É conhecido também que:

$$\alpha_3 I + \alpha_2 A + \alpha_1 A + A^3 = \phi(A) \neq 0 \tag{3.29}$$

Substituindo as Equações (3.28) e (3.29) na Equação (3.27), terá:

$$\phi(\tilde{A}) = \phi(A) - \alpha_2 BK - \alpha_1 BK\tilde{A} - BK\tilde{A}^2 - \alpha_1 ABK - ABK\tilde{A} - A^2 BK$$

Como $\phi(\tilde{A}) = 0$, obtem,

$$\begin{aligned}
\phi(A) &= B(\alpha_2 K - \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2) + AB(\alpha_1 K - K\tilde{A}) + A^2 BK \\
\phi(A) &= \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 K + \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2 \\ \alpha_1 K + K\tilde{A} \\ K \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Uma vez que o sistema é de estado completamente controlável, a inversa da matriz de controlabilidade

$$[B \ : \ AB \ : \ A^2 B]^{-1} \phi(A) = \begin{bmatrix} \alpha_2 K + \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2 \\ \alpha_1 K + K\tilde{A} \\ K \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

existe. Multiplicando ambos os lados da Equação (3.31) pela inversa da matriz de controlabilidade, obtem-se:

$$[B \ : \ AB \ : \ A^2B]^{-1} \phi(A) = \begin{bmatrix} \alpha_2 K + \alpha_1 K \tilde{A} + K \tilde{A}^2 \\ \alpha_1 K + K \tilde{A} \\ K \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

pré-multiplicando ambos os lados da Equação (3.32) por $[0 \ 0 \ 1]$, obtém-se:

$$[0 \ 0 \ 1] [B \ : \ AB \ : \ A^2B]^{-1} \phi(A) = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} \alpha_2 K + \alpha_1 K \tilde{A} + K \tilde{A}^2 \\ \alpha_1 K + K \tilde{A} \\ K \end{bmatrix} = K$$

que pode ser reescrita como:

$$K = [0 \ 0 \ 1] [B \ : \ AB \ : \ A^2B]^{-1} \phi(A) \quad (3.33)$$

Essa última equação fornece a matriz de ganho K de realimentação de estado requerida.

Para um n inteiro, positivo e arbitrário, tem-se:

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] [B \ : \ AB \ : \ \dots \ : \ A^{n-1}B]^{-1} \phi(A) \quad (3.34)$$

esta equação é reconhecida como fórmula de Ackerman para a determinação da matriz de ganho K de realimentação de estado. Diante do exposto, foi visto na seção que os conceitos de controlabilidade e observabilidade têm um papel importante no projeto de sistemas de controle no espaço de estados, uma vez que a partir de suas condições podem ditar a existência de uma solução completa para o problema do projeto do sistema de controle. Portanto na Seção 3.4, será discutido com mais detalhes a questão de Controlabilidade e Observabilidade de um sistema de controle.

3.4 Controlabilidade e Observabilidade

3.4.1 Controlabilidade

Um sistema é dito controlável no instante t_0 se for possível, por meio de um vetor de controle não limitado, transferir o sistema de qualquer estado inicial $x(t_0)$ para qualquer outro estado, em um intervalo de tempo finito (OGATA, 2010).

Considere o sistema de tempo contínuo apresentado na Equação (3.22).

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

onde:

x = Vetor de estado $x \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$

u = Sinal de controle (escalar)

$A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

$B \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$

O sistema descrito pela Equação (3.22) será dito de estado controlável em $t = t_0$ se for possível construir um sinal de controle não limitado que transfira o sistema de um estado inicial para qualquer estado final, em um intervalo de tempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$. Uma vez que todo o sistema for controlável, então esse sistema será considerado de estado completamente controlável.

Será determinada a seguir a condição para a controlabilidade completa de estado, será suposto que o estado final seja a origem do espaço de estados e o instante inicial seja nulo, ou $t_0 = 0$.

A solução da Equação (3.22) será:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

aplicando a definição de controlabilidade, tem-se:

$$\begin{aligned} x(t_1) &= 0 = e^{At_1}x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ x(0) &= e^{At_1}x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ x(0) &= - \int_0^{t_1} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{3.35}$$

Na solução de problemas de engenharia de controle, normalmente é necessário calcular $e^{A\tau}$, portanto será utilizado o terceiro método fundamental de interpolação de Sylvester, ver (OGATA, 2010), onde assume que:

$$e^{A\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau) A^k \quad (3.36)$$

substituindo a Equação (3.36) na Equação (3.35), tem-se:

$$x(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau \quad (3.37)$$

chamando

$$\int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau = \beta_k$$

então a Equação (3.37) passará a ser:

$$x(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \beta_k \quad (3.38)$$

$$x(0) = - [B \quad \vdots \quad AB \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad A^{n-1}B] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

Assim, se o sistema for de estado completamente controlável, então, dado qualquer estado inicial $x(0)$, a Equação (3.39) deverá ser satisfeita. Isso requer que o posto da matriz $M_{n \times n}$

$$M = [B \quad \vdots \quad AB \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad A^{n-1}B]$$

seja posto $(M)=n$.

Portanto, a partir da análise feita, podem-se estabelecer as condições para controlabilidade completa de estado como segue: O sistema dado pela Equação (3.19) é de estado completamente controlável se, e somente se, os vetores $B, AB, \dots, A^{n-1}B$ forem linearmente independente ou a matriz $P_{n \times n}$

$$P = [B \quad \vdots \quad AB \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad A^{n-1}B]$$

tiver posto $(P) = n$.

3.4.2 Observabilidade

Um sistema é dito observável no instante t_0 se, com o sistema no estado $x(t_0)$, for possível determinar esse estado a partir da observação da saída durante um intervalo de um tempo finito (OGATA, 2010).

Considere o sistema descrito por:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.39)$$

Onde:

x = vetor de estado $x \in M_{n \times 1} (\mathbb{R})$

y = vetor de saída (vetor m)

A = matriz $n \times n$

C = matriz $m \times n$

O sistema será considerado completamente observável se todo estado $x(t_0)$ puder ser determinado pela observação de $y(t)$ durante um intervalo de tempo finito, $t_0 \leq t \leq t_1$. Nessas condições o sistema será completamente observável se cada transmissão do estado puder afetar cada elemento do vetor de saída. O conceito de observabilidade é útil na solução de problemas de reconstrução de variáveis de estado não mensuráveis a partir de variáveis mensuráveis, no menor intervalo possível de tempo.

O conceito de observabilidade é muito importante, uma vez que na prática, a dificuldade encontrada com controle por realimentação de estado é que algumas das variáveis de estado não são acessíveis por mediação direta, resultando ser necessário estimar a variável de estado não mensurável para construir os sinais de controle.

Em discussão às condições de observabilidade, serão considerados os sistemas sem excitação, descrito na Equação (3.39). A razão para isto é apresentada a seguir. Desde modo dado um sistema descrito por:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

então,

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

E $y(t)$ é:

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du$$

Como as matrizes A, B, C e D são conhecidas $u(t)$ também é conhecido, assim os últimos dois termos da equação são conhecidas, podendo assim ser subtraídos do valor observado $y(t)$.

Pela Equação (3.39), o vetor de saída $y(t)$ é:

$$y(t) = Ce^{At}x(0)$$

Referindo-se a Equação (3.36), tem-se:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k$$

onde n é o grau do polinômio característica. Reorganizando, tem-se:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) CA^k x(0) \\ y(t) &= \alpha_0(t) Cx(0) + \alpha_1(t) CAx(0) + \dots + \alpha_{n-1}(t) CA^{n-1}x(0) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Se o sistema é completamente observável, então, dada a saída $y(t)$ durante um intervalo de tempo $t_0 \leq t \leq t_1$, $x(0)$ é unicamente determinado pela Equação (3.41). Pode-se mostrar que isso requer que o posto da matriz $nm \times m$

A partir dessa análise, pode-se estabelecer a condição de observabilidade completa a seguir. O sistema descrito em (3.39) é completamente observável se, e somente se, o posto da matriz $n \times nm$ seja n .

$$[C^* \quad A^*C^* \quad \dots \quad (A^*)^{n-1}C^*]$$

For n ou tiver n vetores-coluna linearmente independentes. Essa matriz é denominada “matriz de observabilidade”.

3.5 Realimentação de saídas, (C, A, B) - invariância e Equações Acopladas de Sylvester

Seja o sistema invariante descrito por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.41)$$

onde: $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$. Assume-se que B é de posto completo por colunas e que C é de posto completo por linhas. O problema de base considerado neste trabalho é encontrar uma lei de controle do tipo realimentação estática de saídas

$$u(t) = Ky(t), K \in \mathbb{R}^{m \times p} \quad (3.42)$$

tal que o sistema de saídas em malha fechada seja assintoticamente estável, isto é: $\sigma(A + BKC) \in C^-$, $P = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ é um conjunto de autovalores de $A + BKC$.

Esta parte irá apresentar os conceitos básicos da teoria de controle geométrico que é fundamental na abordagem adotada para a solução de problemas no que diz respeito ao sistema mecânico adotado. As equações acopladas de Sylvester são interpretadas com base na teoria de controle geométrico. Assim, através dessas equações, o problema de estabilização usando realimentação de saídas pode ser decomposto em etapas (SYRMOS; LEWIS, 1993a):

1. Determinação de um subespaço (C, A) —externamente detectável;
2. Estabilização interna deste subespaço.

Na busca de soluções para o problema de estabilização discutem-se e apresentam-se procedimentos para a solução destas equações acopladas, com ênfase em técnicas de posicionamento de auto-estrutura (ALEXANDRIDIS; PARASKEVOPOULOS, 1996) e (SYRMOS; LEWIS, 1993a).

Na seção (3.5.1) será introduzido a noção de subespaço $O. S. (C, A, B)$ — invariante e apresentam-se as equações acopladas de Sylvester, e na seção (3.5.2) apresenta os aspectos algoritmos, ilustrando-os com exemplo numérico.

3.5.1 Subespaços Invariantes e Equações Acopladas de Sylvester

Como em Syrmos e Lewis (1994a), usam-se alguns conceitos e definições da teoria de controle geométrico relatadas por Wonham (1979). Sabe-se que um subespaço $V \subset X$ é (A, B) invariante se existe $F : X \rightarrow Y$ tal que $(A + BF)V \subset V$, ou equivalentemente, $AV \subset V + \text{Im}B$. Por dualidade um subespaço $\tau \subset X$ é (C, A) invariante se existe $L : Y \rightarrow X$, tal que $(A + LC)\tau \subset \tau$, ou equivalentemente, $\tau \supset A(\tau \cap \text{Ker}(C))$.

definição 2. Como em (SYRMOS; LEWIS, 1994a), Um subespaço $V \subset X$, de dimensão v , é (C, A, B) - invariante se V é (A, B) - invariante e (C, A) - invariante.

Seja $V \in \mathbb{R}^{v \times v}$ tal que $\text{Im}(V) = V$ e seja $T \in \mathbb{R}^{(n-v) \times v}$ um anulador à esquerda de V , i.e. : $\text{Ker}(T) = \text{Im}(V)$. A definição apresentada é equivalente à existência de matrizes $(H_V \in \mathbb{R}^{v \times v}, W \in \mathbb{R}^{m \times v})$ e $(H_T \in \mathbb{R}^{n-v \times n-v}, U \in \mathbb{R}^{(n-v) \times v})$, soluções para as seguintes equações acopladas de Sylvester:

$$AV - VH_V = -BW, \quad (3.43)$$

$$TA - H_T T = -UC, \quad (3.44)$$

$$TV = 0 \quad (3.45)$$

A definição 2 e as operações (3.43), (3.44) e (3.45) têm um papel fundamental no tratamento do problema de controle usando realimentação estática de saídas, principalmente por posicionamento de auto-estrutura Syrmos e Lewis (1993a) e Syrmos e Lewis (1994b). O presente estudo leva em conta as propriedades de estabilidade e detectabilidade, através das duas definições a seguir:

(i) Um subespaço (A, B) - invariante V é (A, B) - internamente estabilizável se existe F tal que $(A + BF) \setminus V$ é assintoticamente estável; e

(ii) Um subespaço (C, A) - invariante V é (C, A) - externamente detectável se existe L tal que $(A + CL) \setminus X/V$ é assintoticamente estável.

definição 3. Um subespaço V , de dimensão v , é (C, A, B) - invariante estabilizável pela saída, (ou simplesmente O.S.) (C, A, B) - invariante se V é (A, B) - internamente e (C, A) - externamente detectável.

Assim uma condição necessária e suficiente para que um subespaço $V = Im(v)$ seja $O.S. (C, A, B)$ -invariante é que (3.43), (3.44) e (3.45) sejam verificadas com as condições adicionais de estabilidade:

$$\sigma(H_V) \in C^- \quad (3.46)$$

$$\sigma(H_T) \in C^- \quad (3.47)$$

Em Castelan et al. (2003) e Villarreal et al. (2009) o Teorema 3.5.1. relaciona o conceito de subespaços $O.S. (C, A, B)$ -invariantes à existência de uma lei de controle do tipo realimentação estática de saídas (3.42) que estabiliza o sistema em malha fechada.

Teorema 3.5.1. *Existe uma matriz de realimentação de saídas $K : Y \rightarrow U$ tal que $\sigma(A + BKC) \in C^-$, se e somente se as seguintes condições são verificadas para algumas matrizes $(V \in \mathbb{R}^{n \times v}, H_V \in \mathbb{R}^{v \times v}, W \in \mathbb{R}^{m \times v})$, $(T \in \mathbb{R}^{n-v \times n}, H_T \in \mathbb{R}^{n-v \times n-v}, U \in \mathbb{R}^{n-v \times v})$ e para algum escalar positivo $v \leq n$:*

$$AV - VH_V = -BW, \text{ com } \sigma(H_V) \in C^- \quad (3.48)$$

$$TA - H_T T = -UC, \text{ com } \sigma(H_T) \in C^- \quad (3.49)$$

$$TV = 0 \quad (3.50)$$

$$Ker(CV) \subseteq Ker(W) \quad (3.51)$$

$$Ker(B'T') \subseteq Ker(U') \quad (3.52)$$

$$(3.53)$$

onde: $posto(V) = v$ e $posto(T) = n - v$

É importante notar que estes resultados têm sido apresentados e explorados sob diferentes formas na literatura relativa ao posicionamento de auto-estrutura usando realimentação de saídas, ver Syrmos et al. (1997). O enunciado apresentado corresponde ao enunciado do Teorema 3.5.1 de Syrmos e Lewis (1994a). Como visto as Equações acopladas de Sylvester (3.49), (3.50) e (3.51) descrevem propriedades geométricas do subespaço $V = Im(v)$. Sob a restrição de estabilidade imposta à matriz H_V , a Equação (3.49) significa que o subespaço $V = Im(v)$ deve ser (A, B) -invariante estabilizável; dualmente, (3.50) significa que o subespaço $Ker(T) = V$ deve ser (C, A) - externamente

estabilizável. Assim, sob a condição de acoplamento (3.51), tem-se que a existência de um subespaço $V = \text{Ker}(T)$ O.S. (C, A, B) -invariante, com as condições (3.52) e (3.53) é uma condição necessária e suficiente para a existência de solução do problema considerado. Note também que as condições (3.52) e (3.53) correspondem à existência de uma matriz $K \in \mathbb{R}^{m \times p}$ que verifica as duas igualdades seguintes:

$$KCV = W \quad (3.54)$$

$$TBK = U \quad (3.55)$$

importante observar que garantida à existência de solução para as equações de Sylvester e que K tenha sido obtida tal que (3.54) e ou (3.55) seja verificada, os autovalores em malha fechada são dadas por:

$$\sigma(A + BKC) = \sigma(H_V) \dot{\cup} \sigma(H_T)$$

A seção 3.5.2, irá apresentar os aspectos algorítmicos quanto a verificação dos autovalores em malha fechada.

3.5.2 Aspectos Algorítmicos

As condições matriciais estabelecidas no Teorema 3.5.1 são não lineares em relação às variáveis matriciais (V, H_V, W, T, H_T, U) . Em particular, os termos não lineares VH_V e $H_T T$ presentes em (3.49) e (3.50), respectivamente, podem ser linearizados ao fixarem-se as matrizes H_T e H_V , ou equivalentemente ao definirem-se os autovalores desejados para o sistema em malha fechada.

Será apresentada nesta seção uma técnica algorítmica baseada em procedimentos de posicionamentos de auto-estrutura para obtenção de uma realimentação de saídas. A técnica a ser trabalhada é a proposta de Syrmos e Lewis (1993b), soluciona as equações acopladas de Sylvester em dois passos e pode ser diretamente aplicada a sistemas que verificam a condição $m + p > n$, conhecida como condição de Kimura (KIMURA, 1975). Para o desenvolvimento da técnica, será assumido que a dimensão $V = \text{Im}(V)$ é igual ao número de saídas p , procurando garantir que a matriz $CV \in \mathbb{R}^{p \times p}$ seja inversível e, portanto, que a matriz de ganhos de realimentação possa ser encontrada, a partir da

Equação (3.55), sob a forma $K = W(CV)^{-1}$.

Na sequência, considera-se que o sistema representado por (C, A, B) é controlável e observável, condições esta necessária para a escolha arbitrária dos polos a serem posicionados em malha fechada. Esta condição pode, entretanto ser relaxada para estabilizabilidade e detectabilidade de (C, A, B) , o que implica na utilização dos autovalores não controláveis e não observáveis no espectro desejado para o sistema em malha fechada.

Os polos desejados é denotado por $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-p}, \lambda_{n-p+1}, \dots, \lambda_n\} = \{\Lambda_T, \Lambda_V\}$ onde Λ_T e Λ_V são auto-conjugados. Estes conjuntos são associados as matrizes $H_V \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e $H_T \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ na forma seguinte: $\sigma(H_T) = \Lambda_T = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-p}\}$ e $\sigma(H_V) = \Lambda_V = \{\lambda_{n-p+1}, \dots, \lambda_n\}$. Para simplicidade da apresentação, considera-se que os elementos de $\Lambda = \sigma(A + BKC)$ sejam distintos.

3.5.3 Algoritmo de Syrmos e Lewis

Baseado nas condições expressas através do Teorema 3.5.1, o algoritmo seguinte, proposto em Syrmos e Lewis (1993b), geralmente leva a uma matriz de realimentação de saída que estabiliza o sistema em malha fechada quando a condição de Kimura $n < m + p$ é verificada:

Passo 1: Escolhe-se uma matriz $H_T \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ tal que $\sigma(H_T) = \Lambda_T \in C^-$ e resolve-se a Equação de Sylvester (3.50) para encontrar uma matriz $T \in \mathbb{R}^{p \times p}$ tal que

$$\text{posto} \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} = n \Leftrightarrow \text{Ker}T \cap \text{Ker}C = 0 \quad (3.56)$$

Passo 2: Resolve-se a Equação de Sylvester (3.49), para alguma matriz $H_V \in \mathbb{R}^{p \times p}$ tal que $\sigma(H_V) = \Lambda_V \in C^-$ levando em consideração que a matriz V deve verificar a condição de acoplamento (3.49) e que o $\text{posto}(V)$ deve ser igual a p .

Passo 3: Por construção, a relação (3.56) garante que o $\text{posto}(CV) = p$ e a matriz K pode ser calculada como solução única de (3.55).

Apresenta-se a seguir algumas observações com duplo objetivo de mostrar aspectos relativos à solução numérica dos passos do algoritmo e de justificá-lo teoricamente.

Observação: Os passos 1 e 2 podem ser resolvidos utilizando técnicas padrões

para posicionamento de auto-estrutura. Considerando as matrizes H_T e H_V na forma canônica de Jordan, pode-se adotar o seguinte procedimento:

Passo 1: Encontrar $t_j \in C^n$ e $u_j \in C^p$, tais que:

$$[t'_j \quad u'_j] \begin{bmatrix} A - \lambda_j I \\ C \end{bmatrix} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n - p \quad (3.57)$$

Passo 2: Determinar $v_i \in C^n$ e $w_i \in C^n$ tais que:

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_j I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} = 0 \quad \forall i = n - p, \dots, n \quad (3.58)$$

De forma similar ao caso anterior, as matrizes V e W utilizadas para o cálculo de K podem ser construídas com elementos reais. Em particular: se $\lambda_i \in C$, considera-se $\lambda_{i+1} = \lambda_i^*$ e

$$\begin{cases} V_i = \text{Re}(v_i), & V_{i+1} = \text{Im}(v_i) \\ W_i = \text{Re}(w_i), & W_{i+1} = \text{Im}(w_i) \end{cases}$$

onde v_i e w_i denotam as colunas das matrizes V e W , respectivamente.

Exemplo 3.5.1. *Considera-se um sistema linear apresentado na Equação (3.41), definido por (AZEVEDO; VILLARREAL, 2012a):*

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}; C = [0.5 \quad 0.2]_{1 \times 2}$$

O sistema correspondente é controlável e observável e $m + p = 3 > n$. Os autovalores a posicionar são dados por: $\Lambda_T = \{-1\} \cup \Lambda_V = \{-2\}$.

Passo 1: para $\lambda_1 = -1$, determina-se T que verifica (3.57) e tal que (A, B, T) não tem zeros invariantes:

$$T = [-0.7071 \quad -0.0000]_{1 \times 2};$$

Passo 2: para $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$, determinam-se V e W utilizando (3.58).

$$V = \begin{bmatrix} 0.0000 & -0.4454 \end{bmatrix}_{1 \times 2}; \quad W = \begin{bmatrix} 0.0891 & 0.8909 \end{bmatrix}_{1 \times 2}$$

Passo 3: Determina-se K tal que $KCV = W$:

$$K = \begin{bmatrix} -1.0000 \\ 10.0000 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

A matriz em malha fechada $A_k = A + BKC$ correspondente, cujo os autovalores são os desejados, é:

$$A_k = \begin{bmatrix} -1.0000 & 0.0000 \\ -4.0000 & -2.0000 \end{bmatrix}$$

Após uma breve análise sobre os conteúdos matemáticos a serem empregados nas simulações, é importante que se faça uma análise sobre o sistema de suspensão, tendo em vista que, boa parte das simulações empregadas no trabalho será voltada para o sistema de suspensão. Portanto, na seção 3.6, será abordado um pouco sobre o sistema de suspensão, como também uma assimilação a respeito dos principais tipos empregados no mercado, e as principais características existentes entre elas.

3.6 Sistemas de Suspensão Veicular

Desde os primórdios já era vista a inserção de suspensões veiculares em indústria automobilística, antes mesmo do primeiro veículo automotor. No princípio, a suspensão era basicamente uma mola, porém, ao longo do tempo, foi adicionado um elemento amortecedor. Na década de 30, foram adotados sistemas com baixo amortecimento, que garantiam uma excelente sensação de conforto, a partir daí foram surgindo veículos cada vez mais potentes e rápidos, com isso passou a aumentar o número de acidentes. Assim os projetos de sistemas de suspensão veicular passaram a não se preocupar apenas com o conforto, mais também com a estabilidade do veículo em termos de segurança (STONE; BALL, 2004).

A suspensão é um sistema presente em veículos que é responsável por absorver as irregularidades do terreno e manter todas as rodas no chão. O sistema de suspensão absorve, por meio dos seus componentes, todas as irregularidades do solo e também é responsável pela estabilidade do automóvel. Um sistema de suspensão básico consiste de molas, eixos, amortecedores, braços, barras, e juntas de mola.

As Molas e os amortecedores trabalham em conjunto. A mola absorve os impactos sofridos pelas rodas e os amortecedores seguram a sua distensão brusca, evitando oscilações no veículo. Sem as molas e os amortecedores que permitem a movimentação do controlador do sistema, o desconforto seria muito grande, principalmente em pisos irregulares. Isso sem falar na vida útil do veículo, que diminuiria muito com os fortes impactos sofridos.

3.6.1 Sistemas de Controle da Suspensão

Os sistemas de controle de suspensão interligam-se no princípio de que as forças entre as massas suspensa e não-suspensa do veículo podem ser geradas segundo um padrão que não mais depende exclusivamente da variação relativa da distância entre a roda e o corpo do veículo, assim eles podem ser ativos ou semi-ativos, no sistema ativo pode gerar uma força entre a massa suspensa e a não-suspensa proporcional à velocidade absoluta da massa suspensa. Apesar dos sistemas ativos e semi-ativos serem potencialmente superiores aos sistemas passivos no atendimento deste requisito, o compromisso entre o conforto e a aderência ainda é um desafio significativo de projeto.

Os sistemas passivos de suspensão, encontrados na maioria dos veículos atualmente, são caracterizados por não utilizar fontes de energia, pois se compõe exclusivamente de elementos passivos (molas e amortecedores) ajustados para uma faixa limitada de situações. Por essa razão este sistema é relativamente barato e confiável, Já os sistemas ativos, requerem energias (compressores, bombas, etc) que lhes dão a capacidade de gerar forças ativas para conseguir um bom desempenho de isolamento da vibração em uma faixa ampla de situações (BRASIL, 2012).

3.6.2 Sistema de Suspensão passivo

As suspensões passivas são aquelas em que as propriedades dos componentes mecânicos não podem ser modificadas em tempo real através de sinais externos. São as suspensões mais utilizadas pela indústria automobilística atualmente devido ao seu baixo custo e simplicidade de montagem e manutenção. Neste tipo de suspensão não é possível a adição de energia externa para exercer qualquer tipo de ação de controle. Apesar do avanço tecnológico alcançado no projeto de suspensões ativas e semi-ativas, as suspensões passivas ainda se mostram bastante competitivas (PICADO, 1998).

Os sistemas de suspensões passiva mais conhecidas são as otimizadas e as reguláveis, nas otimizadas não é possível ajustar as características dos componentes, pois elas são projetadas e montadas para atender uma condição pré-determinada de operação, já a suspensão passiva otimizadas é possível ajustar a rigidez das molas ou o fator de amortecimento dos amortecedores através de um dispositivo de regulação estática.

3.6.3 Sistema de Suspensão Ativo

Baseado no trabalho de (BRASIL, 2012), as suspensões ativas são aquelas entre a massa suspensa e a massa não suspensa é acrescentado um atuador capaz de injetar ou retirar energia do sistema. Este atuador é capaz de gerar esforços continuamente variáveis, e é em geral comandado por controladores eletrônicos.

Desta maneira, o sistema de suspensão ativa tem a capacidade de se ajustar continuamente às alterações das condições da estrada. O sistema alarga os parâmetros de projeto monitorizando e ajustando-se constantemente, alterando assim o seu carácter de forma contínua. Os sistemas de suspensão ativa possuem um computador que transmite a um poderoso atuador em cada roda exatamente quando, como, em que distância e com que velocidade se deve mover. Os movimentos da roda deixam de estar sujeitos às interações aleatórias entre a estrada e as diversas molas, amortecedores, e dispositivos à prova de viragem.

Para uma melhor compreensão das diferenças existente entre o sistema de suspensão ativa e passiva pode-se recorrer aos trabalhos de [TAMAI 1995] apud (BRASIL, 2012).

”Neste tipo de suspensão a força entre a massa suspensa e a massa não

suspensa pode não depender mais apenas de movimentos relativos entre pontos ligados pela suspensão, mas também de outras variáveis, às vezes medidas em outros pontos do veículo. Desta forma é possível se obter uma frequência natural baixa sem que a deflexão estática seja excessiva, e escolher a resposta dinâmica da suspensão.”[TAMAI 1995] apud (BRASIL, 2012).

Portanto, as limitações das suspensões ativas começam pelos aspectos práticos da sua construção física nos veículos.

Após uma breve explanação dos conteúdos matemáticos e das definições dos sistemas a serem empregados no trabalho, o Capítulo 4 apresenta o modelo alvo do estudo deste trabalho, a obtenção do sistema de equações e as transformações necessárias neste equacionamento a se obter as equações do sistema ativo.

4 Modelagem Matemática

Neste capítulo é apresentada a estrutura física do problema envolvido bem como a relação entre os componentes que compõe o modelo massa mola amortecedor. Posteriormente em linhas gerais demonstra-se o processo de modelagem de um sistema mecânico, bem como o levantamento da função de transferência do sistema, a partir da função de transferência será feito a modelagem dos problemas, aplicando as técnicas de controle apresentadas no presente trabalho. Depois faz-se necessário a apresentação dos gráficos e assim mostrar como cada um teve sua resposta a partir do problema.

4.1 Modelagem Através da Função de Transferência

O objetivo da modelagem é determinar uma representação matematicamente tratável para um sistema físico. A essa representação dar-se-á o nome de modelo. Portanto, um modelo é uma idealização da realidade que retém suas principais características e que é matematicamente tratável.

A modelagem é uma etapa importante no projeto de sistemas de controle, posto que o êxito dessa tarefa dependerá do modelo criado para o sistema em questão. A modelagem matemática de um sistema dinâmico é constituída por um conjunto de equações diferenciais que representam a dinâmica do sistema com precisão ou, pelo menos, de uma forma aceitável. Um sistema, ele pode ser representado de diversas maneiras, ou seja, ele pode ter vários modelos matemáticos, dependendo da perspectiva a ser considerada.

Segundo Ogata (2010), a dinâmica de muitos sistemas mecânicos, elétricos, térmicos entre outros, podem ser representados em termos de equações diferenciais. Essas equações diferenciais são obtidas a partir das leis físicas que regem o sistema, ou seja, baseado em problemas que tratem de sistemas mecânicos serão empregados as Leis de Newton para obtenção do modelo matemático.

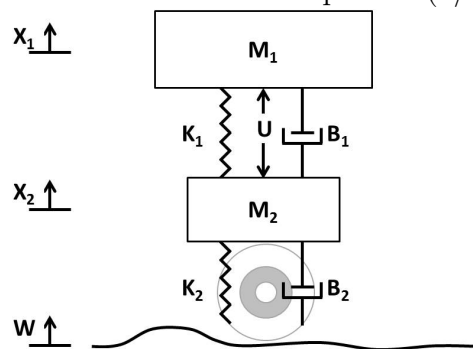
A partir do estabelecimento do modelo físico, são utilizados os princípios da dinâmica para determinar as equações diferenciáveis do movimento. Estas são geralmente na forma de um conjunto de equações ordinárias para sistemas discretos e equações dife-

renciais parciais para sistemas contínuos. As equações podem ser lineares ou não lineares, isso irá depender do comportamento dos componentes do sistema. Entre os métodos utilizados para determinar as equações de movimentos, os mais frequentes são o Método de Newton (onde a Lei mais utilizada é a 2ª Lei), o método do sistema equivalente e Método da energia (Princípio da conservação de energia).

A determinação do modelo de um processo pode ser feita de dois modos diferentes: o primeiro modo parte da descrição da física do processo a partir das equações que descrevem a natureza dos fenômenos envolvidos (elétricos, mecânicos, etc). O segundo modo baseia-se na identificação do sistema a partir de ensaios que relacionam a entrada e a saída. Neste caso não há necessidade de conhecer os detalhes ou os diversos componentes que formam o processo. Apenas a relação entrada-saída é importante (GACS, 2007)

A modelagem aqui delineada irá tratar de um modelo de suspensão automotiva de um automóvel, onde o sistema de suspensão concebida será tratado de (1/4) do modelo de quatro rodas a fim de simplificar o problema massa-mola-amortecedor. O diagrama deste modelo é apresentado na Figura (4.1), este modelo é para um sistema de suspensão ativa, onde é incluído um atuador que é capaz de controlar a força U de controle para controlar o movimento do carro.

Figura 4.1: Modelo do Sistema de Suspensão (1/4) do automóvel



Onde:

M_1 = Massa referente a (1/4) do automóvel; (kg)

M_2 = Massa da Suspensão; (kg)

K_1 = Constante de mola do sistema de suspensão; (N/mpr)

K_2 = Constante de mola da roda e do pneu; (N/mpr)

B_1 = Constante do amortecedor do sistema de suspensão; (Ns/m)

B_2 = Constante do amortecedor da roda e do pneu; (Ns/m)

U = Força de controle

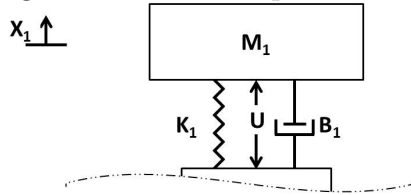
X_1 = Deslocamento da massa suspensa (corpo do automóvel) em relação ao solo

X_2 = Deslocamento da massa não suspensa (eixo) em relação ao solo

W = Deslocamento do solo

A Partir da Figura (4.1) e depois de reconhecido os fatores que regem essa planta, será necessário organizar as equações de movimento, assim será usado os critérios da Lei de Newton, para obter as equações dinâmicas. Primeiramente, a planta será dividida em duas figuras: Figura (4.2) e (4.3), onde a Figura (4.2) irá tratar das equações de movimento que atuam sobre o corpo, ou seja, a parte superior da planta, e a Figura (4.3), irá tratar das forças que atuam sobre a suspensão do automóvel, sendo ela, a parte inferior da planta.

Figura 4.2: Parte Superior da Planta



A partir da Figura (4.2), pode-se perceber que apenas 3 forças estão atuando sobre o corpo:

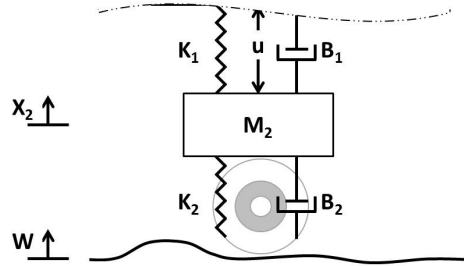
$$FM_1 = 0 - FB_1 - FK_1 + U \quad (4.1)$$

assim sendo, levando em consideração o deslocamento e a velocidade de deslocamento, a Equação (4.1) ficará da forma:

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{X}_1 &= 0 - B_1 (\dot{X}_1 - \dot{X}_2) - K_1 (X_1 - X_2) + U \\ M_1 \ddot{X}_1 &= -B_1 (\dot{X}_1 - \dot{X}_2) - K_1 (X_1 - X_2) + U \end{aligned} \quad (4.2)$$

Após ter trabalhado a modelagem dos parâmetros da equação de movimento da parte superior da planta, agora será apresentado à segunda parte da planta, ou seja, a parte inferior que trata da massa da suspensão.

Figura 4.3: Parte Inferior da Planta



Aplicando agora a Lei de Newton, na Figura (4.3), é observável que 5 forças estão atuando sobre a massa da suspensão:

$$FM_2 = FB_1 + FK_1 + FB_2 + FK_2 - U \quad (4.3)$$

assim, reorganizando a Equação (4.3), e aplicando as forças, ela ficará na forma:

$$M_2\ddot{X}_2 = B_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) + K_1(X_1 - X_2) + B_2(\dot{W} - \dot{X}_2) + K_2(W - X_2) - U \quad (4.4)$$

Assumindo agora que todas as condições iniciais são nulas, de modo que estas equações representam a situação em que a roda do veículo vai até chegar a uma colisão, que neste caso será a irregularidade do terreno. Trabalhando as Transformadas de Laplace nas equações apresentadas a respeito do sistema de suspensão massa mola amortecedor, as equações dinâmicas serão expressas na forma de função de transferência. Assim, a derivação específica a partir das Equações (4.2) e (4.3) para as funções de transferência $G1(s)$ e $G2(s)$, será apresentada nas Equações (4.5) e (4.6).

Aplicando Laplace em ambos os lados da igualdade da Equação (4.2), terá:

$$\begin{aligned}
M_1 \ddot{X}_1 &= -B_1 (\dot{X}_1 - \dot{X}_2) - K_1 (X_1 - X_2) + U \\
\mathcal{L}[M_1 \ddot{X}_1] &= \mathcal{L}[-B_1 (\dot{X}_1 - \dot{X}_2) - K_1 (X_1 - X_2) + U] \\
\mathcal{L}[M_1 \ddot{X}_1] &= \mathcal{L}[-B_1 (\dot{X}_1 - \dot{X}_2)] - \mathcal{L}[K_1 (X_1 - X_2)] + \mathcal{L}[U] \\
M_1 (s^2 X_1(s) - sX_1(0) - \dot{X}_1(0)) &= -B_1 (sX_1(s) - sx_1(0)) - \\
&\quad - (sX_2(s) - sx_2(0)) - K_1 (X_1(s) - X_2(s)) + U(s)
\end{aligned}$$

assumindo agora, que todas as condições iniciais sejam nulas, terá

$$\begin{aligned}
M_1 (s^2 X_1(s)) &= -B_1 (sX_1(s) - sX_2(s)) - \\
&\quad - K_1 (X_1(s) - X_2(s)) + U(s) \\
M_1 (s^2 X_1(s)) + B_1(s) (X_1 - X_2) + K_1 (X_1(s) - X_2(s)) &= U(s) \\
X_1(s) (M_1 s^2 + B_1 s + K_1) - X_2(s) (B_1 s + K_1) &= U(s) \\
X_1(s) (M_1 s^2 + B_1 s + K_1) - X_2(s) (B_1 s + K_1) &= U(s) \\
a_{1,1} X_1(s) - a_{1,2} X_2(s) &= U(s), \tag{4.5}
\end{aligned}$$

onde:

$$a_{1,1} = M_1 s^2 + B_1 s + K_1$$

$$a_{1,2} = B_1 s + K_1$$

Aplicando Laplace em ambos os termos da igualdade da Equação (4.4), terá:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[M_2 \ddot{X}_2] &= \mathcal{L}[B_1 (\dot{X}_1 - \dot{X}_2) + K_1 (X_1 - X_2) + B_2 (\dot{W} - \dot{X}_2) + \\
&\quad + K_2 (W - X_2) - U] \\
M_2 (s^2 X_2(s) - sX_2(0) - \dot{X}_2(0)) &= B_1 ((sX_1(s) - sX_1(0)) - (sx_2(s) - sX_2(0))) + \\
&\quad + K_1 (X_1(s) - X_2(s)) + B_2 ((sW(s) - sW(0)) - \\
&\quad - (sx_2(s) - sX_2(0))) + K_2 (W(s) - X_2(s)) - U(s)
\end{aligned}$$

assumindo as condições iniciais nulas,

$$\begin{aligned}
M_2 (s^2 X_2(s)) &= B_1 (sX_1(s) - sx_2(s)) + K_1 (X_1(s) - X_2(s)) + \\
&\quad + B_2 (sW(s) - sx_2(s)) + K_2 (W(s) - X_2(s)) - U(s)
\end{aligned}$$

$$X_1(s)(B_1(s) + K_1) + X_2(s)(M_2s^2 + (B_1 + B_2)(s) + (K_1 + K_2)) = (B_2s + K_2)W(s) - U(s)$$

$$a_{2,1}X_1(s) + a_{2,2}X_2(s) = (B_2s + K_2)W(s) - U(s) \quad (4.6)$$

onde:

$$a_{2,1} = B_1(s) + K_1$$

$$a_{2,2} = M_2s^2 + (B_1 + B_2)(s) + (K_1 + K_2)$$

Escrevendo as Equações (4.5) e (4.6), na forma matricial obtém-se:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(s) \\ (B_2s + K_2)W(s) - U(s) \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$$

ou,

$$\begin{aligned} \Delta &= (M_1s^2 + B_1s + K_1) \cdot (M_2s^2 + (B_1 + B_2)(s) + (K_1 + K_2)) - \\ &\quad - ((B_1(s) + K_1)) \cdot ((B_1(s) + K_1)) \end{aligned}$$

Calculando o inverso da matriz Δ e depois multiplicar com entradas $U(s)$ e $W(s)$ do lado direito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(s) \\ (B_2s + K_2)W(s) - U(s) \end{bmatrix}$$

Quando pretende considerar o controle $U(s)$, monta-se $W(s) = 0$. Assim tem a função de transferência $G_1(s)$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
G_1(s) &= \frac{X_1(s) - X_2(s)}{U(s)} \\
G_1(s) &= \frac{(M_1 + M_2)s^2 + B_2s + K_2}{\Delta}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Quando pretende considerar uma perturbação na entrada $W(s)$, é necessário definir $U(s) = 0$. Assim, a função de transferência de $G_2(s)$, se apresenta da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
G_2(s) &= \frac{X_1(s) - X_2(s)}{W(s)} \\
G_2(s) &= \frac{-M_1B_2s^3 - M_1K_2s^2}{\Delta}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Após a obtenção das funções de transferência (com e sem perturbação), será apresentado agora na seção 4.2, a modelagem do sistema utilizando espaços de estados.

4.2 Modelagem no Espaço de Estados

Devido à complexidade apresentada por sistemas com mais de uma entrada e/ou saída, Ogata (2010) define que a abordagem no espaço de estados é mais apropriada para análise dessa modalidade. Portanto, a modelagem matemática de um sistema físico composto de um conjunto de variáveis de entrada, de saída e de estado relacionadas entre si por meio de equações diferenciais de primeira ordem consiste na representação em espaço de estados. Como o sistema objeto desta modelagem matemática apresenta múltiplas entradas e uma única saída, ou seja, é do tipo MISO (do inglês Multiple Input Single Output), utilizar-se-á a modelagem no espaço de estados a fim de conceber a abordagem mais apropriada proposta por Ogata (2010) e aplicar as análises apresentadas no capítulo 2, onde relata um pouco sobre a obtenção da Matriz K utilizando o método das Equações Acopladas de Sylvester.

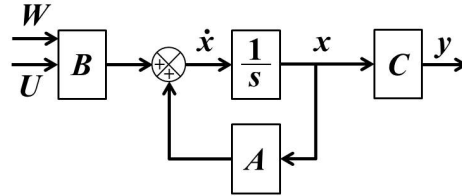
Tomou-se quatro grandezas que são derivadas $\dot{X}_1, \ddot{X}_1, \dot{Y}_1, \ddot{Y}_1$ como variáveis de estado, onde $Y_1 = X_1 - X_2$. Desta forma, a partir das Equações (4.5) e (4.6), as variáveis $\dot{X}_1, \ddot{X}_1, \dot{Y}_1$, e \ddot{Y}_1 e das variáveis de entrada, U e W .

Com isso, o presente sistema apresenta as seguintes Equações do espaço de estados:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \ddot{X}_1 \\ \dot{Y}_1 \\ \ddot{Y}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{B_1 B_2}{M_1 M_2} & 0 & \left[\frac{B_1}{M_1} \left(\frac{B_1}{M_1} + \frac{B_1}{M_2} + \frac{B_2}{M_2} \right) - \frac{K_1}{M_1} \right] & -\frac{B_1}{M_1} \\ \frac{B_2}{M_2} & 0 & -\left(\frac{B_1}{M_1} + \frac{B_1}{M_2} + \frac{B_2}{M_2} \right) & 1 \\ \frac{K_2}{M_2} & 0 & -\left(\frac{K_1}{M_1} + \frac{K_1}{M_2} + \frac{K_2}{M_2} \right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \dot{X}_1 \\ Y_1 \\ \dot{Y}_1 \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{M_1} & \frac{B_1 B_2}{M_1 M_2} \\ 0 & -\frac{B_2}{M_2} \\ \left(\frac{1}{M_2} + \frac{1}{M_2} \right) & -\frac{K_2}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix} \\
Y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \dot{X}_1 \\ Y_1 \\ \dot{Y}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Logo, o sistema em espaço de estados pode ser representado pelo diagrama de blocos apresentado na Figura (4.4).

Figura 4.4: Diagrama de Blocos do Sistema Modelado



Após a modelagem matemática do sistema através das leis de Newton, e utilizando-se da álgebra demonstrada nas equações anteriores foi possível obter as seguintes matrizes:

A matriz de estado de tamanho 4×4 :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{B_1 B_2}{M_1 M_2} & 0 & \left[\frac{B_1}{M_1} \left(\frac{B_1}{M_1} + \frac{B_1}{M_2} + \frac{B_2}{M_2} \right) - \frac{K_1}{M_1} \right] & -\frac{B_1}{M_1} \\ \frac{B_2}{M_2} & 0 & -\left(\frac{B_1}{M_1} + \frac{B_1}{M_2} + \frac{B_2}{M_2} \right) & 1 \\ \frac{K_2}{M_2} & 0 & -\left(\frac{K_1}{M_1} + \frac{K_1}{M_2} + \frac{K_2}{M_2} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz de entrada de tamanho 4×2 :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{M_1} & \frac{B_1 B_2}{M_1 M_2} \\ 0 & -\frac{B_2}{M_2} \\ \left(\frac{1}{M_2} + \frac{1}{M_2}\right) & -\frac{K_2}{M_2} \end{bmatrix}$$

A matriz de saída de tamanho 3×4 :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz de transferência direta 1×2 :

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x é o vetor contendo as 4 variáveis de estado:

$$x = \begin{bmatrix} X_1 \\ \dot{X}_1 \\ Y_1 \\ \dot{Y}_1 \end{bmatrix}$$

u é o vetor contendo as 2 entradas:

$$u = \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix}$$

É válido advertir que existem inúmeras representações no espaço de estados, de maneira que é possível obter-se diferentes valores de matrizes A , B , C e D para representar um sistema com saída y e entrada u . Os valores de tais matrizes dependem de como foram realizadas as simplificações algébricas e quais variáveis foram escolhidos para entrada e saída do sistema. Diferentemente da abordagem no domínio da frequência, o uso da representação no espaço de estados não se limita a sistemas com componentes

lineares e com condições iniciais nulas. Como foi relatado inicialmente, a representação no espaço de estados constituísse numa técnica de controle moderno que pode trabalhar com entradas e saídas múltiplas. Substituindo os valores do sistema objeto desta modelagem é possível verificar a controlabilidade e observabilidade do referido sistema a partir das matrizes do espaço de estados.

A controlabilidade é verificada através da seguinte matriz:

$$cnt = \left[B \quad : \quad AB \quad : \quad A^2B \quad : \quad A^3B \right]$$

E o sistema é dito completamente controlável se a matriz de controlabilidade *cnt* tiver posto 4. A observabilidade é verificada através da seguinte matriz:

$$obs = \begin{bmatrix} C \\ \dots \\ CA \\ \dots \\ C^2A \\ \dots \\ C^3A \end{bmatrix}$$

Do mesmo modo, o sistema é dito completamente observável se a matriz de observabilidade *obs* tiver posto 4. Utilizando as linhas de comando no MATLAB® apresentada em Apêndice I é possível comprovar que o sistema é de estado completamente controlável e observável.

O código retorna que o posto da matriz controlabilidade e o posto da matriz observabilidade são igual a 4, portanto satisfaz-se as condições necessárias, desse modo, é possível utilizar as Equações de Sylvester para determinar o valor da matriz *K*, de realimentação de estados. É importante ressaltar que as constantes das molas, das massas e dos amortecedores foram utilizadas a partir de (GAUR; AGARWALL, 2012).

Após as representações das equações no espaço de estado, será apresentado a seguir, no capítulo 5 as análises e os resultados obtidos a partir das perturbações externas que foram levadas em consideração no trabalho, como também as matrizes de realimentação de estados utilizando os dois métodos proposto no trabalho, sendo eles alocação de polos e equações de Sylvester.

5 Modelagem, Análises e Resultados

Neste capítulo serão apresentadas algumas simulações dos modelos apresentados nos capítulos anteriores, onde será utilizado dois tipos de excitação externa. Cada um desses obstáculos será aplicado ao modelo de suspensão proposto no trabalho e os resultados obtidos serão comparados na forma de domínio do tempo e frequência. Na verdade espera-se que o sistema de suspensão do automóvel tenha capacidade satisfatória aderência à estrada, ao mesmo tempo proporcionando conforto ao andar sobre colisões e irregularidades providas da estrada. Quando o automóvel está passando por qualquer perturbação na estrada (ou seja, quando o automóvel encontra um terreno irregular), o corpo de automóvel não deve ter grandes oscilações, e as oscilações deve se dissipar rapidamente. Uma vez que a distância $X_1 - W$ é muito difícil de medir, e a deformação do pneu ($X_2 - W$) é insignificante, assim será usado a distância $X_1 - X_2$ em vez de $X_1 - W$ como a saída do problema.

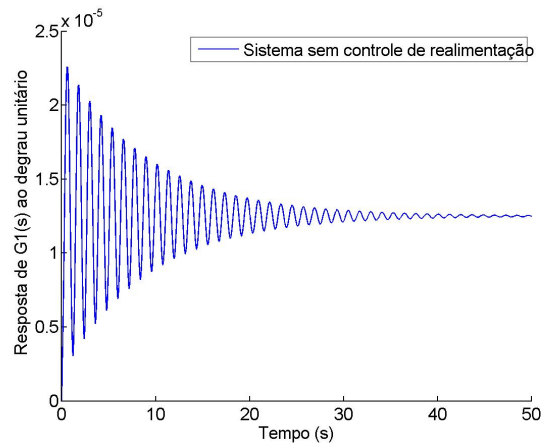
A perturbação da estrada (W), em que este problema será primeiro simulado, será por uma entrada de degrau, a fim de verificar a resposta em malha aberta, com um objetivo de saber se o sistema por si só (sem controlador) ele consegue uma estabilização. No caso, será simulado saindo de um buraco. Assim, pretende-se analisar a saída ($X_1 - X_2$) e ver se tem um máximo sobressinal inferior a 5% e um tempo de acomodação inferior a 5 segundos. Por exemplo, quando o automóvel que passa sobre um degrau de $10cm$, o corpo deste veículo irá oscilar dentro de um intervalo de $\pm 5mm$ e retornar a um passeio suave após 5 segundos.

5.1 Resposta do Sistema em Malha Aberta

Foi usado o MATLAB® para mostrar como o sistema de malha aberta original executa, ou seja, sem qualquer controle de realimentação.

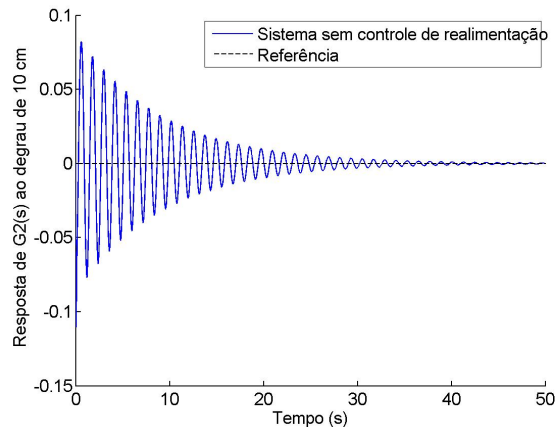
A partir gráfico apresentado na Figura (5.1) da resposta em malha aberta para um degrau unitário de força aplicada a entrada, pode-se perceber que o sistema é sub-amortecido. Assim, pessoas que estiverem no automóvel irá sentir uma pequena

Figura 5.1: Resposta em Malha Aberta



quantidade de oscilação. Além disso, o sistema tem um tempo inaceitavelmente longo para atingir o estado de equilíbrio (o tempo de acomodação é muito grande). Agora utilizando uma perturbação $W(s)$, com magnitude $0,1m$.

Figura 5.2: Resposta em Malha Aberta com Perturbação

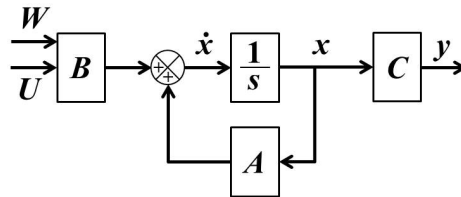


A partir do gráfico apresentado na Figura (5.2) da resposta em malha aberta para $10cm$ de perturbação, é observável que, quando o automóvel passa pela elevação de $10cm$ de altura na estrada, o automóvel irá oscilar para um inaceitavelmente longo tempo ($50s$) com uma amplitude inicial de $8cm$. Deste modo, as pessoas sentadas não vai se sentir confortável com tal oscilação, devido ao grande superação e resolução de tempo longo.

5.2 Resposta do Sistema em malha Fechada

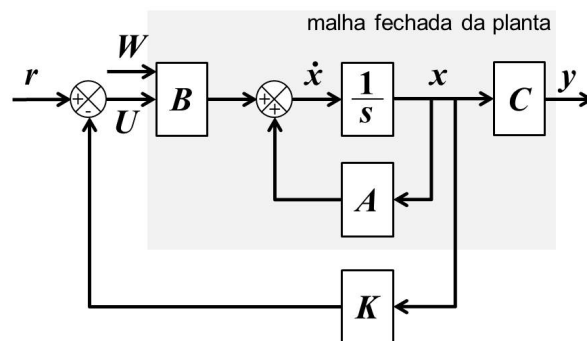
A solução para problemas visto no sistema em malha aberta, é o de adicionar um controlador de realimentação para o sistema a fim de melhorar o desempenho. O diagrama esquemático do sistema de circuito fechado é apresentado na Figura (5.3), o que será discutido com mais detalhe nas secções de concepção do controlador.

Figura 5.3: Diagrama do Sistema de Malha Fechada



Na literatura é possível encontrar várias formas de se projetar um controlador para as mais diferentes plantas industriais. Dentre estas pode-se citar os métodos: Tentativa e erro (ajuste manual), Métodos de sintonia de Ziegler-Nichols, (CHR) , Cohen e Coon, Método da Integral do Erro, Lugar das raízes, Alocação de polos, Domínio da Frequência, Espaço de Estados, IMC, Lógica Fuzzy, Algoritmos Genéticos, entre outros. As repostas do sistema a alguns tipos de entradas podem ser obtidas por meio do software MATLAB® SIMULINK® utilizando-se do seguinte modelo apresentado na Figura (5.4).

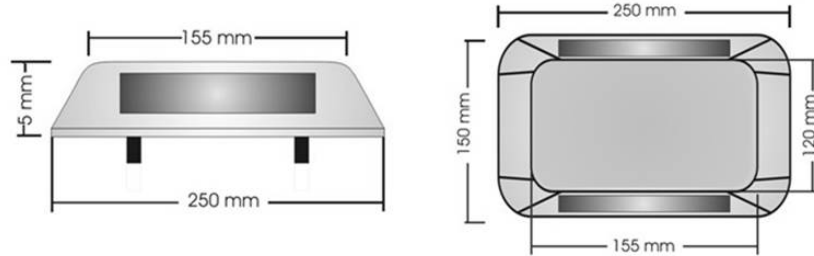
Figura 5.4: Diagrama do Sistema de Malha Fechada da Planta



Serão comparadas e analisadas as respostas do sistema a dois tipos de entradas W diferentes: carro viajando a $10m/s(36km/h)$ passando por buraco de $10cm$ de profundidade e $60cm$ de comprimento, e passando sob um tachão reflexivo (dispositivos

auxiliares à sinalização horizontal de vias) semelhante ao mostrado na Figura (5.5).

Figura 5.5: Modelo do Tachão Reflexivo (sinalizador horizontal de vias terrestres) Modelado



Desta forma a entrada W representará dois perfis diferentes da via, conforme apresentado na Figura (5.6). As variações de tempo em cada entrada são obtidas através da relação entre velocidade, deslocamento e tempo, ou seja, $\Delta(t) = \frac{\Delta(x)}{v}$.

A Figura (5.6) ilustra como foram modelados, através do bloco *Signal Builder* do software MATLAB® SIMULINK®, os sinais de entradas que representam a perturbação da via quando o automóvel passa por um buraco de 60cm de comprimento e 10cm de profundidade e a Figura 5.7 apresenta como foram modeladas as perturbações quando o automóvel passa por um tachão reflexivo usado na sinalização de vias com 15cm de comprimento e 5cm de altura.

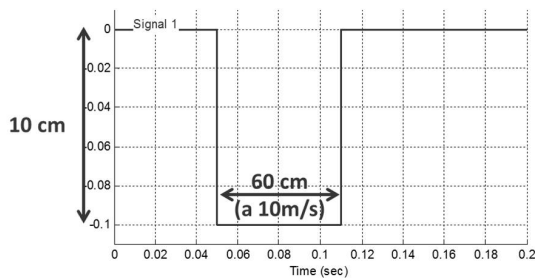


Figura 5.6: Sinais Representativo do Buraco de 60 cm de Comprimento e 10 cm de Profundidade

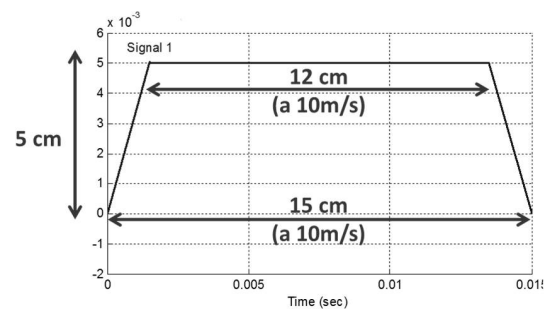


Figura 5.7: Tachão Reflexivo Usado na Sinalização da Via

5.3 Análises e Resultados

Primeiramente observou a passagem do automóvel na perturbação com o perfil em forma de buraco. É importante frisar que foi adotada uma velocidade constante de $36km$ para o automóvel no momento de passagem na perturbação. O gráfico de resposta do automóvel sentindo esta perturbação, pode ser visto na Figura (5.8). Vale ressaltar que para este gráfico apresentado na Figura (5.8), foi utilizado o controle por realimentação de saídas, onde a matriz K , foi encontrada utilizando o método por alocação de polos ver (OGATA, 2010). O gráfico apresentado na Figura (5.9), foi simulado utilizando o mesmo sistema de controle, porém o método utilizado na obtenção da matriz K , foi através das Equações de Sylvester ver (SYRMOS; LEWIS, 1993b). Os dados e os comandos, que foram utilizadas para as simulações poderão ser vistos em II e III. Onde o II representa o teste no tachão e o III representa o teste no buraco.

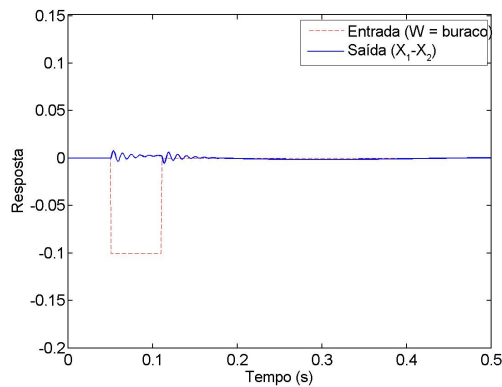


Figura 5.8: Resposta do sistema com a perturbação buraco

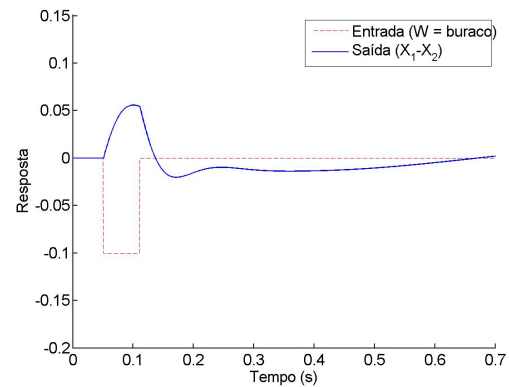


Figura 5.9: Resposta do sistema com a perturbação tachão reflexivo

Após as simulações realizadas a partir do problema 1, em que consistia na perturbação em forma de buraco, agora será simulado, utilizando a mesma técnica de controle, porém com um distúrbio diferente. Será tratado agora, um tachão reflexivo de perfil trapezoidal retangular, cujo as dimensões são: base maior medindo $15cm$, base menor $12cm$ e a altura $5cm$, como pode ser visto nas Figuras (5.10) e (5.11), levando em consideração que a velocidade será a mesma, ou seja, $36km/h$.

Diante das análises realizadas entre as quatro diferentes respostas, utilizando o controle por realimentação de estados empregado a duas técnicas diferenciadas na obtenção da matriz de realimentação K , pode-se perceber a partir das Figuras (5.8) e (5.9), que o sistema ao depara-se com uma perturbação externa, com perfil de um buraco, terá

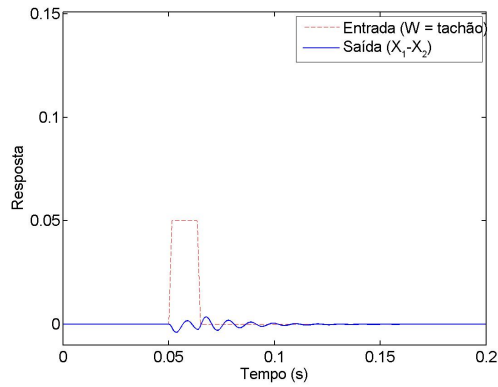


Figura 5.10: Resposta do sistema com a perturbação buraco

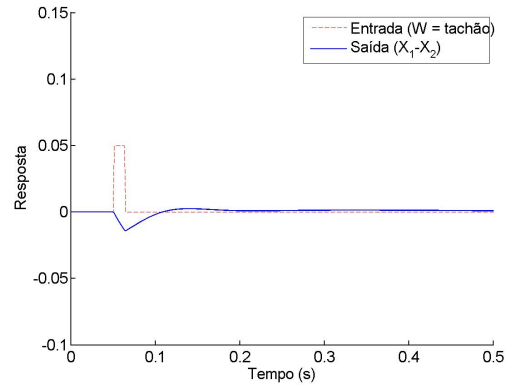


Figura 5.11: Resposta do sistema com a perturbação tachão reflexivo

uma melhor resposta quando fizer uso do método de alocação de polos para a obtenção da matriz de realimentação K . Uma vez que o sistema apresentou resultados satisfatórios em relação a estabilidade do sistema, mostrando uma melhor resposta que o valor encontrado pelo método das Equações de Sylvester.

Quando a entrada do sistema tem como perfil um tachão reflexivo, também pode-se perceber que a matriz K encontrada utilizando o método de alocação de polos, tem uma melhor resposta, como pode ser visto nas Figuras (5.10) e (5.11).

Assim sendo, pode-se tomar como resultado, a partir das análises simuladas, e os dois métodos empregados na obtenção da matriz de realimentação K , que o sistema quando submetido aos dois tipos de perturbações externas, o mesmo tem um melhor rendimento quando aplicado o controle por realimentação de estados, utiliza-se o método de alocação de polos. Vale ressaltar também que segundo o toolbox do MATLAB®, as equações de Sylvester apresentam um melhor resultado quando o sistema é de ordem 2, como pode ser visto no trabalho de Azevedo e Villarreal (2012b), onde faz a modelagem de um sistema de suspensão passivo, e obtém uma função de transferência de ordem 2, e após realizar as simulações, o resultado apresenta resposta satisfatória para o sistema.

6 Conclusões e Trabalhos Futuros

Diferentemente da abordagem no domínio da frequência o uso da representação no espaço de estados, que se emprega no domínio do tempo, não se limita a sistemas com componentes lineares, e com condições iniciais nulas, como fora relatado inicialmente, a representação no espaço de estados, constitui-se numa técnica de controle moderno aplicável a sistemas com entradas e saídas múltiplas, como por exemplo o sistema objeto deste trabalho (sistema de suspensão de 1/4 do automóvel).

A partir das matrizes do espaço de estados, (A, B, C, D) , foi possível concluir que o sistema era de estado completamente controlável e completamente observável, uma vez que o posto da matriz de controlabilidade e o da matriz de observabilidade são ambas iguais a ordem da matriz A , ($n = 4$).

Conclui-se também que o sistema massa mola amortecedor, estabiliza-se por si só, porém apresentando elevado sobressinal e tempo de acomodação demaseadamente elevado (aproximadamente $50s$). Utilizando a técnica de controle por realimentação de saídas, foi possível reduzir consideravelmente o máximo sobressinal, e o tempo de acomodação do sistema submetido a duas perturbações diferentes.

Nesse contexto, vale salientar que a entrada W (elevação), foi modelado para simular aproximação de perfis comumente encontrados em uma via real. Desta forma, observou-se o comportamento da relação entre a elevação do veículo com o eixo do mesmo ($X_1 - X_2$), quando o automóvel com uma velocidade de $10m/s$ ($36km/h$) passa por um buraco de $10cm$ de profundidade e $60cm$ de comprimento e também quando este mesmo automóvel passa por um tachão reflexivo de perfil trapezoidal retangular, com base maior medindo $15cm$, base menor $12cm$ e a altura $5cm$. Como é ilustrado na Figura (5.5).

Pode-se concluir também que o sistema quando submetido as perturbações externas apresentada no trabalho, é notório observar que a matriz de realimentação obtida através do método de alocação de polos, para realizar o controle no problema em questão, teve um resultado satisfatório. Mostrando uma estabilização em menos de $0.5s$ quando a perturbação se refere a um buraco, e estabilizando em menos de $0.2s$ quando submetido ao tachão.

Sugere-se para trabalhos futuros:

1. Utilizar outras simplificações algébricas que podem gerar matrizes A, B, C e D diferentes;
2. Os efeitos da velocidade para a saída do sistema;
3. Aplicar um algoritmo de otimização computacional que encontre uma matriz responsável por um menor tempo de acomodação e um menor máximo sobressinal, ou seja, melhorar a resposta do sistema para alguns perfis de entrada.

Referências Bibliográficas

ALEXANDRIDIS, A.; PARASKEVOPOULOS, P. A new approach to eigenstructure assignment by output feedback. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 41, n. 7, p. 1046–1050, 1996.

ALMEIDA, A. C. R. *Simulação e Controle de Um Sistema de Suspensão Simplificado*. [S.l.], 2002.

ANDO Y E SUZUKI, M. Controle de sistemas de suspensão ativos utilizando o método de perturbação singular. *Prática de Engenharia de Controle*, Elsevier, v. 4, n. 3, p. 287–293, 1996.

AZEVEDO, C. M. M.; VILLARREAL, E. R. L. Mechanical system modeling, output feedback and state feedback. In: *Conference on Computational Engineering and Scientific Application*. [S.l.]: IEEE, CESA, 2012. v. 1, p. 229–233.

AZEVEDO, C. M. M.; VILLARREAL, E. R. L. Stabilization: Algorithms for mechanical system using output feedback and state feedback. In: *Computational Science and Its Applications (ICCSA), 2012 12th International Conference on*. [S.l.]: IEEE, 2012. v. 12, p. 97–102.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática*. [S.l.]: Contexto, São Paulo, 2006.

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I.; FIGUEREDO, V.; WETZLER, H. G. *Álgebra linear*. [S.l.]: Harper & Row do Brasil, 1980.

BRASIL, M. *LQG/LTR ROBUST SEMI-ACTIVE SUSPENSION CONTROL SYSTEM USING MAGNETO-RHEOLOGICAL DAMPERS*. [S.l.], 2012.

CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. *Álgebra linear e aplicações*. [S.l.]: Atual, 2007.

- CASTELAN, E. B.; HENNET, J.-C.; VILLARREAL, E. L. Quadratic characterization and use of output stabilizable subspaces. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 48, n. 4, p. 654–660, 2003.
- CASTRO, D. E.; SOUZA, V. L. M. *Reciclagem e Modelagem na Industria Automobilistica*. [S.l.]: CDU, Belo Horizonte, 2012.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. *Sistemas de controle modernos*. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos, 2001.
- ESMAILZADEH, E.; FAHIMI, F. Optimal adaptive active suspensions for a full car model. *Vehicle System Dynamics*, Taylor & Francis, v. 27, n. 2, p. 89–107, 1997.
- GACS. *Introdução a Modelagem - Material de Aula*. [S.l.]: PUC, Rio Grande do Sul, 2007.
- GAUR, S.; AGARWALL, S. Performance improvement of bus suspension using pid controller. *IJMRS International Journal of Engineering Sciences*, v. 4, p. 143–147, 2012.
- KIMURA, H. Pole assignment by gain output feedback. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 20, n. 4, p. 509–516, 1975.
- LANGLOIS, R. G.; ANDERSON, R. Preview control algorithms for the active suspension of an off-road vehicle. *Vehicle System Dynamics*, Taylor & Francis, v. 24, n. 1, p. 65–97, 1995.
- OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2010.
- PICADO, R. M. *Controle semi-ativo de suspensões automotivas*. Tese (Doutorado) — Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 1998.
- SAM, Y. M.; OSMAN, J. H.; GHANI, M. A class of proportional-integral sliding mode control with application to active suspension system. *Systems & control letters*, Elsevier, v. 51, n. 3, p. 217–223, 2004.
- SAMPAIO, F. *Material de Aula, Instrumentação e Controle*. [S.l.], 2010.
- SILVA, W. P.; GRANDINETTI, F. J. Modelagem e simulação de elementos empregados em suspensões veiculares ativas. *Revista Ciências Exatas*, Ciências Exatas, v. 11, n. 2, p. 23–29, 2005.

SODRE, u. *Material de Aula, Ensino Superior*. 2002.

URL:<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/superior.htm>. Last Visited: 20/06/2313.

STEINBRUCH, A.; PAULO, W. *Álgebra linear*. [S.l.: s.n.], 1987.

STONE, R.; BALL, J. K. *Automotive engineering fundamentals*. [S.l.: s.n.], 2004.

SYRMOS, V.; LEWIS, F. Output feedback eigenstructure assignment using two sylvester equations. *Automatic Control, IEEE Transactions on, IEEE*, v. 38, n. 3, p. 495–499, 1993.

SYRMOS, V.; LEWIS, F. Output feedback eigenstructure assignment using two sylvester equations. *Automatic Control, IEEE Transactions on, IEEE*, v. 38, n. 3, p. 495–499, 1993.

SYRMOS, V.; LEWIS, F. A bilinear formulation for the output feedback problem in linear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on, IEEE*, v. 39, n. 2, p. 410–414, 1994.

SYRMOS, V.; LEWIS, F. A bilinear formulation for the output feedback problem in linear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on, IEEE*, v. 39, n. 2, p. 410–414, 1994.

SYRMOS, V. L.; ABDALLAH, C. T.; DORATO, P.; GRIGORIADIS, K. Static output feedbacka survey. *Automatica*, Elsevier, v. 33, n. 2, p. 125–137, 1997.

VILLARREAL, E. R. L.; VARGAS, J. A. R.; HEMERELY, E. M. Static output feedback stabilization using invariant subspaces and sylvester equations. *TEMA Tend. Mat. Apl. Comput*, v. 10, n. 1, p. 99–110, 2009.

WONHAM, W. M. *Linear multivariable control: a geometric approach*. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 1979.

ZAGO, F.; RAFICOV, M.; A.C., V.; L.A., R. Modelagem matemática e simulações computacionais do controle ótimo de um quarto do sistema de suspensão automotiva. In: *Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications*. [S.l.]: DICON, 2010. v. 1, p. 1172–1178.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações diferenciais, vol. 1*. [S.l.]: Makron Books, 2001.

I Comando MATLAB para Controlabilidade e Observabilidade

```

frame
m1 = 2500;
m2 = 320;
k1 = 80000;
k2 = 500000;
b1 = 350;
b2 = 15020;

A=[0,1,0,0;
-(b1*b2)/(m1*m2),0,((b1/m1)*((b1/m1)+(b1/m2)+(b2/m2)))-(k1/m1),-(b1/m1);
b2/m2,0,-((b1/m1)+(b1/m2)+(b2/m2)),1;
k2/m2,0,-((k1/m1)+(k1/m2)+(k2/m2)),0];

B=[0,0;
1/m1,(b1*b2)/(m1*m2);
0,-(b2/m2);
(1/m1)+(1/m2),-(k2/m2)];

C=[1,0,0,0; 0,1,0,0; 0,0,1,0];

D=[0,0; 0,0; 0,0];

cnt = ctrb(A,B);
R1=rank(cnt)
obs = obsv(A,C);
R2=rank(obs)

```

II Comando MATLAB - Teste Tachão

```

frame
TIME1=0.00000:0.00001:0.05000;
TIME2=0.05001:0.00001:0.05150;
TIME3=0.05151:0.00001:0.06350;
TIME4=0.06351:0.00001:0.06500;
TIME5=0.06501:0.00001:0.50000;
TIMET=0.00000:0.00001:0.50000;
T=[TIME1, TIME2, TIME3, TIME4, TIME5];
X1=zeros(1, length(TIME1));
x2=0.00001:0.00001:0.0015;
X2=(50/1.5)*x2;
X3=0.05*ones(1, length(TIME3));
x4=0.06351:0.00001:0.0650;
X4=((-.05*x4+0.00325)/0.0015);
X5=zeros(1, length(TIME5));
X=[X1, X2, X3, X4, X5];
[y, t]=lsim(sys1, X, TIMET);
figure(3)
hold on
plot(TIMET, X, '—r')
AXIS([0 .5 -.1 .151])
ref=0*ones(1, length(TIMET));
aa1=plot(t, y, 'b');
set(aa1, 'LineWidth', 1.4);
xx=xlabel('Tempo_(s)');
yy=ylabel('Resposta');
set(xx, 'FontName', 'New_Baskerville_BT', 'FontSize', 12);
set(yy, 'FontName', 'New_Baskerville_BT', 'FontSize', 12);
set(gca, 'FontName', 'New_Baskerville_BT', 'FontSize', 12, 'LineWidth', 1.4);
legend('Entrada_(W=_tachão)', 'Saída_(X_1-X_2)', 'Location', 'NorthEast')
hold off
print('-djpeg', 'graf8')

```

III Comando MATLAB - Teste Buraco

```

frame
TIME1=0:0.001:0.05;
TIME2=0.051:0.001:0.11;
TIME3=0.111:0.001:2;
TIMET=0:0.001:2;
X1=zeros(1,length(TIME1));
X2=-0.1*ones(1,length(TIME2));
X3=zeros(1,length(TIME3));
X=[X1,X2,X3];
[y,t]=lsim(sys2,X,TIMET);
figure(4)
hold on
plot(TIMET,X,'-r')
axis([0 .70 -.2 .151])
ref=0*ones(1,length(TIMET));
aa1=plot(t,y,'b');
set(aa1,'LineWidth',1.4);
xx=xlabel('Tempo_(s)');
yy=ylabel('Resposta');
set(xx,'FontName','New_Baskerville_BT','FontSize',12);
set(yy,'FontName','New_Baskerville_BT','FontSize',12);
set(gca,'FontName','New_Baskerville_BT','FontSize',12,'LineWidth',1.4);
legend('Entrada_(W=_buraco)','Saída_(X_1-X_2)','Location','NorthEast')
hold off
print('-djpeg','graf7teste')

```